EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

SPECIAL

'van A tot Z'
op de keper beschouwd

56e jaargang
1980/1981
no. 7
maart

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 27,—; contributie zonder Euclides *f* 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9", 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Mededelingen enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 09 65.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 37,60. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 21,90. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 6,20 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

Woord vooraf

Voor U ligt de tweede 'uitgebreide boekbeschouwing' die onder verantwoordelijkheid van de redaktie tot stand is gekomen.
Was het in april 1978 (53e jrg nr. 8) een leergang voor wiskunde in het lbo, die uitvoerig de aandacht kreeg, dit keer hebben we ons bepaald tot de onderbouw van mavo/havo/vwo. De keuze viel op de methode 'Van A tot Z'[1]), onder meer omdat bij de samenstelling daarvan uitgegaan is van ekspliciet genoemde didaktische principes.
Wat is nu een dergelijke boekbeschouwing méér dan een recensie? Wie de eerste van 1978 heeft gelezen, weet dat het antwoord op deze vraag vooral de bijzondere procedure betreft. In het onderhavige geval hebben vijf wiskundeleraren-didaktici elk een diepgaande analyse gemaakt van de zes deeltjes 'Van A tot Z'. In de daarop volgende diskussie kwamen algemene en specifieke punten van waardering en kritiek naar voren. Het bleek, dat vele op- en aanmerkingen niet los gezien konden worden van een achterliggende visie op wiskunde leren en wiskunde onderwijzen. Andere opmerkingen hadden te maken met specifieke didaktische belangstellingspunten van elk van de vijf leden van deze werkgroep. Er werd besloten om in een algemene beschouwing over 'Van A tot Z' ook de gemeenschappelijke denkbeelden over wiskundeonderwijs naar voren te brengen (hoofdstuk 2).
Daarnaast zou dan ieder afzonderlijk nog eens zijn licht op de methode laten schijnen, elk vanuit een specifieke invalshoek (hoofdstuk 3).
Men zou zich kunnen afvragen of een analyse als deze niet al te subjektief bepaald is. Een analyse op basis van objektieve kriteria maakt in het algemeen een betrouwbaarder indruk, elke ander die dezelfde kriteria gebruikt moet dan tot dezelfde konklusies komen.
Tot nu toe bestaan dergelijke kriteria niet voor diepgaande analyses. Slechts als men zich beperkt tot het tellen van aantallen pagina's of figuren, of als men bijvoorbeeld genoegen neemt met een vergelijking van aantallen oefenopgaven met het aantal inzichtelijke introdukties van nieuwe leerstof, is een 'objektieve' weging mogelijk.
In ons geval wilden we dieper gaan, wilden we trachten na te gaan in hoeverre deze leerboeken het wiskundeleren bij de kinderen tot stand konden brengen. En tevens wilden we proberen te achterhalen hoe de auteurs zich hadden voorgesteld hoe dat wiskunde leren verloopt, op basis van didaktische principes voorge-

dacht, op basis van de boeken in de klas gerealiseerd.[2])
U zult dus in de volgende paragrafen elk van de vijf werkgroepsleden kunnen ontmoeten; soms komen onderlinge verschillen tot uitdrukking in de gehanteerde stijl, heel zelden blijken verschillen in opvattingen naar voren te komen. In de uitvoerige diskussies over de zes deeltjes werd dit al duidelijk. Maar ook als het gesprek de gegeven leergang 'oversteeg', bleek men sterk op één lijn te zitten. Enige essentiële gesprekspunten mogen hier niet ongenoemd blijven.
We noemen: aanvechtbare leerstofkeuzen in het Rijksleerplan, de doelen en middelen van het wiskundeonderwijs in de onderbouw, de (wiskundige) instelling van de leerlingen, de beperkingen van een werkboekaanpak, de invloed van multiple choice opgaven en de gewenste ruimte voor inbreng van de leraar.
Gezegd moet worden, dat vele vragen onbeantwoord bleven. Sommige ervan konden alleen beantwoord worden door de kollega's in de school, die 'Van A tot Z' dagelijks in werking zien. Dit was aanleiding om de wiskundesektie van het *Johannescollege* in *Den Helder* te benaderen. Deze kollega's bleken bereid om vanuit hun ervaringen te reageren op de eerste schrijfsels van de werkgroep, en bepaalde vragen te beantwoorden (hoofdstuk 5).
Niet alleen docenten, ook leerlingen zijn gebruikers. En we hadden het geluk, dat enkele leerlingen van het voornoemde kollege eveneens bereid waren om hun licht te laten schijnen over 'Van A tot Z' (hoofdstuk 5).
Tenslotte komen de auteurs aan het woord.
Op basis van alle voorgaande hoofdstukken, aangevuld met nog onbeantwoorde vragen, spraken we met elkaar over wiskundeonderwijs, in de klas, in de leergang 'Van A tot Z', in het algemeen en over achterliggende didaktische principes. (hoofdstuk 6).
Bovenstaande schets van de gevolgde procedure, en de poging om daarvan een verantwoording te geven, laten niet toe dat de vijf werkgroepsleden anoniem blijven. Vandaar dat we ons nu aan de lezer voorstellen:

1 *Maurits Dienske*, docent aan opleiding voor tweede- en derdegraads (wiskunde-)leraren.
2 *Fred Korthagen*, heeft dezelfde achtergrond als Maurits, is nu docent aan opleiding voor eerstegraads (wiskunde-) leraren.
3 *Fred Goffree*, was medewerker van het IOWO, niet direkt betrokken bij het voortgezet onderwijs, wel algemeen wiskundig-didaktisch geïnteresseerd.
4 *Peter Sanders*, leraar wiskunde in een scholengemeenschap havo/vwo.
5 *Bert Zwaneveld*, eveneens wiskundeleraar, bovendien mede-auteur van een wiskundemethode.

f.g.

1 Eerste indruk

– 'Van A tot Z' in vogelvlucht –

Sinds de jaren zestig, toen de 'moderne wiskunde' op de vervolgscholen haar intrede deed, zijn er regelmatig nieuwe en hernieuwde methodes verschenen. Het ziet er niet naar uit dat we spoedig in het wiskundeonderwijs over een zekere uniformiteit kunnen spreken, daartoe zijn er nog te veel ontwikkelingen gaande. De wiskundeleraar, die een nieuwe methode doorbladert, zal meestal naar herkenningspunten zoeken. Die herkenningspunten kunnen betrekking hebben op zijn visie over wiskunde onderwijzen en wiskunde leren.
De methode 'Van A tot Z' is niet zomaar een wiskundeleergang. Het is een methode met een geheel eigen karakter, met een zorgvuldig bepaalde presentatie, gebaseerd op welomschreven didaktische principes. Wie deze principes goed op zich laat inwerken, zal nieuwsgierig zijn naar de verwezenlijking ervan. We noemen:

- aansluiting bij de ervaringswereld van de leerling;
- een geleidelijke groei naar deduktief denken;
- het principe van de telescoped reteaching;
- een intuïtieve inleiding in de meetkunde;
- zelfwerkzaamheid; met behulp van het werkboek wordt de theorie door de leerling al werkende zelf opgebouwd.

Eén en ander heeft konsekwenties voor de samenstellers van de methode gehad. De leerlingen doen haast alles zelf. Ieder hoofdstuk begint met een korte beschrijving van wat er in dat hoofdstuk behandeld wordt. Aan het eind van het hoofdstuk treffen we een samenvatting aan. De teksten zijn in overeenstemming met het ontwikkelingsnivo van de leerling. Na enkele hoofdstukken kunnen de leerlingen een toets maken (meerkeuze-vraagstukken). Het resultaat van zo'n toets bepaalt of er steunstof nodig is. Na iedere toets treffen we dan ook een hoofdstuk steunstof aan. Regelmatig komen behandelde onderwerpen terug, uitgebreid met iets nieuws. Bij ieder leerjaar uit de onderbouw behoort een werkschrift. Deze werkschriften bevatten uitsluitend opgaven. De meeste tekeningen zijn voorgedrukt en de opgaven bestaan uit zinnen, die moeten worden aangevuld. Niet alleen benadrukken deze werkschriften het principe van de zelfwerkzaamheid, zij geven ook mogelijkheden tot differentiatie in tempo, belangrijk in het brugjaar waar met heterogene klassen wordt gewerkt. Het feit,

dat de deeltjes eindigen met een hoofdstuk 'herhaling en uitbreiding' geeft aan, dat de auteurs rekening hebben gehouden met de heterogene plaatsing en met het verlengde brugjaar.
Wat de inhoudelijkheid van de wiskunde betreft valt onmiddellijk op, dat de funktie in de algebra een belangrijke rol speelt en dat de meetkunde duidelijk geënt is op de transformatiemeetkunde. Regelmatig wordt er met vektoren gewerkt in kombinatie met transformaties van het vlak. Overigens worden de vektoren ook gebruikt bij het introduceren van algebraïsche eigenschappen, zoals bij eigenschappen van de optelling en de behandeling van de verdeeleigenschap.
Duidelijk is, dat de samenstellers niet alleen werken volgens een aantal didaktische principes, maar ook de inhoudelijkheid van de wiskunde een geheel eigen karakter geven. Het principe van 'de aansluiting bij de ervaringswereld' blijft niet alleen bij het eerste hoofdstuk. Ook de benadering van de kansberekening en het vele tekenwerk (spiegelen van fantasiefiguren) geven inhoud aan dit principe. De volgorde van behandeling van onderwerpen moet in het kader van de gehanteerde doelstelling gezien worden.[3]) Ook wat dit laatste betreft laat de methode 'Van A tot Z' zich moeilijk vergelijken met andere methodes.
We zouden nu de inhoud van ieder deeltje kunnen geven, maar het is wellicht aardiger om aan te geven wat tijdens de vogelvlucht opviel. Dit 'opvallen' met dan ruim gezien worden. Het kan betrekking hebben op begrippen, notaties, tijd van behandeling van een onderwerp, e.d. De lijst van opvallende zaken is subjektief. De lijst zal door sommigen worden uitgebreid, door anderen worden ingekort.

De delen HV 1a en 1b

Begrippen

Kardinaalgetal, universum, komplementaire verzameling, driekante cm, symmetrische funktie, samengestelde funktie, identieke funktie, eenheidscirkel, eenheidsvektor, nevenvektor, afhankelijke vektor, kans.

Onderwerpen

- spiegelen in de x-as, y-as en de lijn $x = y$ met formules;
- de pijlvoorstelling van een rechte in het assenstelsel;
- de verdelingseigenschap (distributief);
- de wisseleigenschap (kommutatief);
- de schakeleigenschap (associatief) en de abstrakte formulering van genoemde eigenschappen;
- hoe ruimtelijke figuren getekend moeten worden;
- regelmatige vijf-, zes- en twaalfhoek;
- tweedegraadsfunkties en hun grafiek;
- matriks met haar (eenvoudige) eigenschappen;
- het oplossen van vergelijkingen met behulp van inverse funkties.

Notaties

(4,2) voor de translatie 4 naar rechts, 2 naar boven. De officiële notatie voor samengestelde funkties.

De delen HV 2a en 2b

Begrippen

Staafdiagram, spreiding, modus, steekproeven, bijektie, segment (= gesloten interval), interval (= open interval), gewone breuken (niet decimaal).

Onderwerpen

- de verdeling van figuren in een aantal kongruente figuren;
- eerste, tweede en derde merkwaardige produkt;
- inhoud van piramide en prisma;
- koördinaten in R_3;
- het gebruik van de rekenmachine bij een evenredigheidsmatriks;
- translaties in de ruimte;
- wortelfunkties;
- het optellen en aftrekken van breuken (deel 2b), gevolgd door breuken met letters.

De delen HV 3a en 3b

Begrippen

Norm van een vektor, homotetische ligging van figuren, kansmatriks, premisse en konklusie, neutraal element van bewerkingen, asymptoten, relatieve speling bij benaderde getallen, cirkeldiagram, linker en rechter kwartiele deviatie.

Onderwerpen

- het rekenen met benaderde getallen;
- sin en cos als kentallen van een eenheidsvektor;
- de sinusregel als evenredigheidsmatriks;
- projektie van een punt op een rechte;
- vektorvoorstelling van een rechte;
- vijf kenmerken van kongruente driehoeken;
- de hyperbool;
- spreidingsmaten;
- afstandsformule in R_3 voor twee punten;
- vier kenmerken van gelijkvormigheid van driehoeken.

In het laatste jaar wordt duidelijk naar een soort afronding van de stof toegewerkt. De deeltjes 3a en 3b omvatten zeer veel stof en oefening en de leerlingen worden vaker gekonfronteerd met iets dat ze moeten 'onthouden'. De hoofdstukken zijn vaak lang en vergeleken bij de eerste vier deeltjes te lang (hoofdstuk 3 uit 3a, 'afbeeldingen', heeft 23 bladzijden, zij het dan met veel herhaling).
Bij de mavo-deeltjes (de *m*-serie) hebben de auteurs toelichtingen geschreven, waarin men naast het doel van een les, ook opmerkingen bij de opgaven en suggesties voor aanvullende opdrachten aantreft. De inhoud van de mavodeeltjes komt overeen (tot de derde klas) met de leerstof voor de havo-vwodeeltjes, waardoor een overstap van de leerling zonder noemenswaardige moeilijkheden kan verlopen.
In de volgende hoofdstukken strijkt de vogel neer en wordt er dieper op bepaalde aspekten van 'Van A tot Z' ingegaan.

p.s.

2 Algemene beschouwing

– 'Van A tot Z' en wiskundeonderwijs –

Inleiding

Het analyseren van een wiskundeleergang voor het onderwijs is eenvoudiger dan het konstrueren ervan. Wiskundeleraren, die zich om welke reden dan ook aan een analyse van bestaand materiaal wagen, zijn in de eerste plaats geneigd om zich kritisch op te stellen. In dat geval springen dan veelal eerst wiskundige, wiskundig didaktische en algemeen didaktische onvolkomenheden in het oog. Vele op- en aanmerkingen zijn vanzelfsprekend subjektief bepaald, elke leraar heeft tenslotte zo zijn eigen opvattingen over de ordening van de leerstof, de introduktie van nieuwe begrippen, de mate van aanschouwelijkheid, de kapaciteiten van leerlingen, de inbreng van de leraar, de hoeveelheid stof, wat wiskunde eigenlijk is, e.d. De aanwezigheid van vele leergangen wiskunde op de Nederlandse schoolboekenmarkt is een zichtbaar gevolg hiervan.
In deze algemene beschouwing willen we beginnen met een positieve benadering van de methode 'Van A tot Z'. Met het noemen van de sterke punten, geven we de lezer tevens een indruk van de (subjektieve) opvattingen over wiskundeonderwijs, die we als beoordelaars er op na houden. Deze opvattingen worden daarna wat eksplicieter naar voren gebracht, waardoor een kader is geschapen om de dan volgende kritische aantekeningen te kunnen plaatsen.
Zowel de positieve als de negatieve kritiek die in deze inleiding naar voren wordt gebracht, draagt een globaal karakter. Ze is genoteerd na een eerste doordenking van de totaliteit van de leergang. In de volgende paragrafen willen we nader op enkele fundamentele zaken ingaan. De lezer, die met ons op de details wenst in te gaan, weet dan echter vanuit welk standpunt de auteurs van deze beschouwing dit hebben gedaan.

Positieve punten

Opbouw

'Van A tot Z' munt uit door een *weldoordachte opbouw* van de leerstof. Wie de totaliteit overziet, krijgt een indruk van een konsistent geheel, zowel in wiskundig als in didaktisch opzicht.

In een serieuze poging om de leerlingen zelfstandig zich de leerstof te laten eigen maken, heeft men *een werkboek* voor individuele verwerking ingericht. Hierin worden de leerlingen stap voor stap door de stof geleid. Moeilijke punten in hun leerproces zijn voorzien, en door een *uitgekiende uitleg* worden mogelijke blokkades vermeden. Dit doet een goede werksfeer in de klas verwachten, alle leerlingen kunnen druk bezig zijn met de aangeboden leerstof.
Opvallend is de *konsekwente aanpak*, waarvan de behandeling van het funktiebegrip en de toepassing ervan in het gebied van de vergelijkingen fraaie voorbeelden zijn. Soms houdt men bij de introduktie van een nieuw begrip (bijvoorbeeld 'hoek' in de brugklas) al rekening met een vervolg in hogere leerjaren (de funktie $x \rightarrow \sin x$).
Opvallend zijn ook de *met zorg uitgevoerde figuren*, waarbij funktioneel gebruik is gemaakt van kleuren. Wat een leraar in klassikaal onderwijs in zijn beste ogenblikken op het bord zou willen tekenen, vinden de leerlingen nu in hun boek terug. Dit geldt ook voor de *korte samenvattingen*, aan het eind van ieder hoofdstuk. Steeds wordt hier aangegeven wat de essentiële punten in het voorgaande waren. In de tekst heeft men trouwens ook al bepaalde aanwijzingen aangebracht in de vorm van 'onthoud'...'. Zo weten de leerlingen tijdens en na het werken aan een bepaald onderdeel, wat ze er 'van geleerd moeten hebben'. Over grotere gehelen heeft men *toetsen* in het boek aangebracht. De leerlingen worden daardoor in de gelegenheid gesteld om na te gaan of ze de stof beheersen. Wie nog manko's in zijn kunnen signaleert, vindt vervolgens in de '*steunstof*' een mogelijkheid om zich te revancheren. Voor anderen is daarnaast '*verrijkingsstof*' geschapen.

Telescoped reteaching

Bij de konstruktie van de leergang is zichtbaar gewerkt volgens, zoals de auteurs dit noemen, het principe van *telescoped reteaching*.[4]) Telkens wordt bepaalde, reeds opgedane kennis in vorige hoofdstukken, eerst opgehaald. Men doet een stapje terug en herhaalt, in een sneller tempo, wat nodig is voor de komende uitbreiding.

Presentatie

Als essentieel hulpmiddel voor het leren van meetkundige begrippen, metoden en inzichten komt het (orthogonale) *rooster* naar voren. De roosterstruktuur lijkt een sterk psychologische ondersteuning van het meetkundig denken (en doen) te bieden. Steeds meer krijgen begrippen als vektor, grafische methoden, het gebruik van koördinaten, symmetrie e.d. een inhoudelijke invulling tegen de achtergrond van dit denkmodel, dat bij aanvang –volgens de auteurs– als intuïtieve meetkundige struktuur al bij de kinderen bekend mag worden verondersteld.
Op essentiële momenten wordt *basiskennis* van de lagere school geaktualiseerd. In sommige gevallen (zoals bij oppervlakte, breuken en kommagetallen) passen de auteurs ook het principe van telescoped reteaching toe: bekend te veronderstellen zaken worden nog eens vanaf de basis, in een versneld tempo, opgehaald.

Visualiseringen

Niet vergeten mogen worden, in deze positieve aanzet, de pogingen om bepaalde begrippen en relaties *zichtbaar te maken.* Zo kunnen de leerlingen de juistheid van het merkwaardige produkt $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ meetkundig ervaren. Ook de Stelling van Pythagoras krijgt een dergelijke visuele onderbouwing. Dit levert naar onze mening – en uit diverse overwegingen – het aardigste stukje wiskundeonderwijs uit de methode.
Van Hiele's didaktische vondst – die hij overigens aan J. K. Timmer toeschrijft – van *de evenredigheidsmatriks* dient hier ook genoemd te worden. Dit beschrijvingsmiddel – of notatieschema, zo U wilt – heeft zijn didaktische waarde op de vele gebieden, waar verhoudingen een rol spelen (schaal, vergroten, lineaire funkties, gelijkvormigheid, homotetie, breuken) reeds veelvuldig bewezen.
Wie de leerstof op wiskundige inhoud alleen bekijkt, zal het met ons eens zijn dat de auteurs duidelijk blijk geven van kennis van zaken. Op diverse momenten moet de leraar bemerken tegen welke belangrijke *wiskundige achtergronden* de behandelde stof kan worden begrepen. Soms kunnen de auteurs niet nalaten om de leerlingen vanuit die achtergrond toe te spreken. (Je weet dat *wij in de wiskunde*... 1b, pag. 16).
Maar voordat we toekomen aan meer kritische geluiden, een positieve opmerking over de *rekenmachientjes.* De auteurs hebben op enkele punten in de leergang een suggestie gedaan tot het gebruik ervan. Het schijnt ons toe, dat hierdoor een zinvol gebruik ook op andere momenten wordt gestimuleerd.

Visie op wiskunde en wiskundeonderwijs

Tot zover hebben we een groot aantal positieve punten opgesomd. Ze betreffen vooral de opbouw en presentatie van de achtereenvolgende leerstofonderdelen, binnen de opzet van een werkboek voor individueel en zelfstandig gebruik door de leerlingen. Dat op elk van deze punten evenzeer een kritische noot kan worden gekraakt, zal hierna blijken. Maar eerst trachten we het kader aan te geven, waarbinnen de kritiek begrepen dient te worden. Het handelt daarbij om een visie op wiskundeleren en -onderwijzen, die de auteurs van deze kritiek in het volgende eksposee menen te kunnen samenvatten.
We beschouwen wiskunde als een *menselijke aktiviteit,* die gekenmerkt wordt door specifieke trekken. Een wiskundige benadering van bepaalde problemen leidt er vaak toe, dat men tracht struktuur aan te brengen in een ogenschijnlijke chaos, of men komt er toe te schematiseren, of men ontwerpt symbolen om de probleemsituatie in kaart te kunnen brengen. Belangrijk vinden we ook het (be-)redeneren, het zoeken van wetmatigheden, het generaliseren, de behoefte gevoelen om een sluitend en overtuigend bewijs te produceren, het toepassen van verkregen kennis, het algoritmiseren van methoden en het verkorten van oplossings(denk-)processen.
Vanzelfsprekend is een volledige en uitputtende lijst van wiskundige aktiviteiten, in dit korte bestek niet te geven. Daarom besluiten wij deze aanduiding met wellicht de belangrijkste wiskundige aktiviteit: het reflekteren op het eigen doen

en denken. Evenals de logikus reflekteert op het wiskundig denken in het algemeen, moet degene die wiskunde bedrijft (leert, beoefent, toepast) reflekteren op zijn individuele werkwijze.
We vatten de wiskunde ook op als een zeer *specifieke* taal, waarin efficiënt en systematisch over bepaalde problemen gekommuniceerd kan worden. Daarom achten we in het wiskundeonderwijs een element van *samenwerking* (tussen leerlingen en leraar, tussen leerlingen onderling) onmisbaar. Juist in de diskussie kan het taalaspekt van de wiskunde tot zijn recht komen.

Wiskundeonderwijs moet ons inziens veelvuldig *probleemgeoriënteerd* en *onderzoeksgericht* zijn. Dit betekent niet, dat elke leerling alles zelf moet ontdekken. Wel moet de stof zo georganiseerd zijn, dat er voldoende, en gemotiveerde uitdagingen zijn om voortdurend (mentaal) aktief te zijn. We achten pogingen om het leerproces voor de leerlingen zo gemakkelijk mogelijk te maken, niet altijd even gelukkig. Ook al zijn ze leerpsychologisch verantwoord of hebben ze het bedoelde effekt. Wiskunde (als proces) kan slechts geleerd worden met vallen en opstaan. Vanzelfsprekend zijn er leerstofonderdelen die geleerd moeten worden op het nivo van feitenkennis of instrumentele vaardigheid. *Leerprocessen*, die hieraan ten grondslag liggen, hebben een andere karakter.
Zo kan het leren optellen van vektoren beperkt blijven tot een tekentechniek, de kop-staart procedure. Maar ook in een dergelijk geval zouden de leerlingen aangespoord moeten worden tot een zo groot mogelijke mentale inspanning. In het voorbeeld van de vektoroptelling kunnen het de achterliggende translaties zijn, waarin de bedoelde optelling betekenis krijgt.
Tijdens het leren van wiskunde zou de leerling de gelegenheid dienen te krijgen op dit leren zelf te *reflekteren*. Hierbij ondervindt hij bewust de kracht van het eigen denken.[5]) Wat hij leert, is niet alleen een hoeveelheid wiskundige feitenkennis en vaardigheden, maar ook verkrijgt hij een bepaalde instelling ten opzichte van problemen en probleemaanpakken. Men zou kunnen spreken van een *wiskundige attitude*, gekenmerkt door bijvoorbeeld de drang om naar wetmatigheden te zoeken, de behoefte gevoelen om een bewijs te vinden, de poging om aan begrippen betekenis (binnen bekende konteksten) te geven, de inspanning om abstrakte gedachten zichtbaar te maken of het gevoelen van een zekere bevrediging bij het vinden van een overtuigende redenering.
In goed wiskundeonderwijs leren de kinderen naar onze mening ook *onderscheid* te maken *in de opgedane kennis*. Zo hebben generaliserende uitspraken van een induktieve gedachte soms een ander karakter dan lokale deduktieve redeneringen (we denken hierbij aan generalisaties als 'min maal min is plus' naast de redeneringen, waarmee wordt aangetoond dat een bepaalde vierhoek een ruit is). Ook zijn afspraken (definities) wat anders dan rekenregels, die zich weer onderscheiden van stellingen.
Een wiskundeleergang is in eerste instantie opgebouwd op basis van de logische samenhang van de gekozen (of voorgeschreven) leerstof. *De vertikale planning* door de leerjaren van de onderbouw betreft evenwel ook andere aspekten. We noemen verschillende taalnivo's, waarop de leerlingen worden aangesproken, de afstandelijkheid waarmee over wiskunde wordt gesproken, de mate waarin de struktuur van de wiskunde in beeld wordt gebracht en de kompleksiteit van de aangeboden problemen.

Tenslotte, maar niet het minst belangrijk, is er de leerling zelf. Heel moeilijk is het om in een leerboek aan de *individuele verschillen* van leerlingen tegemoet te komen. Men behoeft slechts te denken aan twee uitersten in de mogelijke leerstijlen, zoals impulsief en reflekterend.[6]) Eveneens verschillen de algoritmisch ingestelde leerlingen sterk van de meer heuristisch bepaalden. Eigenlijk vragen dit soort verschillen, hoewel er weinig konkreet onderzoeksmateriaal over beschikbaar is, om verschillende wiskundeonderwijs-aanpakken.
Maar ook op een andere manier kan een leerboek rekening houden met *de leerlingen-doelgroep*. Naast reeds opgedane kennis en vaardigheden zouden ook vroegere ervaringen met reken/wiskundeonderwijs en bestaande intuïties in de overwegingen van auteurs een rol moeten spelen. Denk in dit geval bijvoorbeeld aan begrippen als evenwijdig, kans, translatie, spiegeling, hoek en variabele.
Welnu, met deze ontboezeming over ideaal wiskundeonderwijs is een kader geschapen waarbinnen onze beschouwing over de methode 'Van A tot Z' begrepen moet worden. Het is dus in geen geval een objektieve analyse op algemeen aanvaarde kriteria. Zowel de positieve als de negatieve kritische noten dient de lezer in dit kader, een subjektief kader dus, te zien.

Kritische punten

Nogmaals opbouw

We signaleerden hierboven de *weldoordachte opbouw* van de leerstof in 'Van A tot Z'. Een eerste kritische opmerking is hier echter op zijn plaats.
De auteurs beperken zich naar onze mening te zeer tot de wiskundige kontekst. Slechts op enkele, spaarzame momenten betreedt men een gebied buiten de wiskunde. Toepasbaarheid van het gekende betreft in de meeste gevallen slechts de volgende wiskundige leerstof, zoals gezegd in deze leergang weldoordacht georganiseerd.
Wie de inhoudsopgave van de zes deeltjes doorleest, vindt maar af en toe niet-wiskundige konteksten (bijvoorbeeld: dobbelsteen, pasfoto, fietspad, het lezen van een kaart, pech en geluk, neerslag, loonsverhoging, twee kansspelen, fotolampen, een schoolonderzoek). Bovendien lijken deze konteksten er wel erg met de haren te zijn bijgesleept. Men wekt de indruk, dat er gewoon wat getallenmateriaal nodig was. Ook de poging om een werkboek voor individuele verwerking te konstrueren, heeft tot grote *beperkingen* geleid. Stap voor stap wordt de leerlingen de wiskunde 'van A tot Z uitgelegd'. Voortdurend verstrekt men informatie en geeft men aanwijzingen om bepaalde dingen te doen. Van wiskunde leren, in de zin van een mentale aktiviteit van de kinderen zelf, is naar onze mening nauwelijks sprake. Echte problemen, als startpunt van een denkproces, komen nauwelijks voor. Zo wordt wiskundeonderwijs meer tot het verstrekken van informatie dan tot het aanzetten en begeleiden van leerprocessen.
Door de *konsekwente aanpak* binnen de wiskundige kontekst heeft men ook *konsessies* moeten doen. De introduktie van het hoekbegrip, als lengte van een boog van de eenheidscirkel, komt ook in aanmerking voor de kritische noot.

Men gaat voorbij aan het intuïtieve begrip van hoeken, dat leerlingen door ervaringen, vooral buiten de reken/wiskundelessen reeds hebben gevormd. Ook de introduktie van de goniometrie gaat ons inziens aan het bestaan van ervaringsgegevens, bijvoorbeeld met betrekking tot verhoudingen, hellingen en steilheid, voorbij.
De *met zorg uitgevoerde figuren*, onmisbaar in een werkboek als dit, ontnemen leerlingen de gelegenheid om *zelf strukturen* te ontdekken en bewust te maken. Ze worden van meet af aan gekonfronteerd met de ideale voorstellingen van de auteurs. Zelfwerkzaamheid krijgt hierdoor een zeer specifieke invulling; een invulling die niet strookt met ons idee van aktief en gedifferentieerd wiskundeleren.
In de *korte samenvattingen* kan men, binnen het kader van dit werkboek, slechts terugkomen op de gewenste *produktkennis*. Van enige reflektie op voorafgaande leerprocessen is geen sprake. Wiskunde wordt zodoende gepresenteerd als een soort produktkennis, waarbij het nivo van feitenkennis nauwelijks wordt overschreden. Bovendien bleek het niet mogelijk om *de verschillende soorten kennis*, waarover hierboven het een en ander is gesteld, voor de leerlingen te onderscheiden. De vorm en inhoud van de *toetsen*, waarbij de multiple choice-mode werd gevolgd, getuigen hier ook van. Over het *diagnostisch effekt* ervan, en de mogelijkheden van steunstof en verrijkingsstof willen we graag in een volgende paragraaf leraren-gebruikers (en wellicht leerlingen) aan het woord laten.
De realisering van de *telescoped reteaching* roept op diverse momenten vragen op. Naast het feit, dat het de leerlingen wel steeds weer erg gemakkelijk wordt gemaakt om toegang te vinden tot een nieuw hoofdstuk, blijkt het ook moeilijk om de vertikale leerstofplanning te betrekken op verhoging van taalnivo's en de kompleksiteit van problemen. Wanneer men namelijk teruggrijpt op een vorig hoofdstuk, ligt het voor de hand om de daar gekozen formuleringen vanwege een zo groot mogelijke herkenbaarheid, te kiezen. Dat inmiddels de leerlingen in de tussenliggende hoofdstukken op een hoger nivo van taalgebruik in de wiskunde waren gekomen, wordt dan even vergeten. Ditzelfde geldt vanzelfsprekend voor denknivo's. We komen hierop later, in details, terug.

Nogmaals presentatie

De *roosterstruktuur*, door alle delen heen een basis voor het meetkundig werk, heeft ook duidelijke *beperkingen*. Zo blijkt het onmogelijk om een *willekeurige* driehoek (als variabel) te beschouwen, als voor de hoekpunten bepaalde roosterpunten worden gekozen. Bij elke keus liggen de hoeken en zijden vast, en algemene beschouwingen krijgen een partikuliere achtergrond.
Bij het *aktualiseren van lagere school basiskennis* poogt men, zoals bij breuken, in kort bestek ook de lagere school didaktisch te volgen. Van een nieuwe aanpak, bijvoorbeeld in het kader van de algebra, onthouden de auteurs zich. We menen dat *een nieuw licht* op de oude problematiek, zeker in geval van breuken, voor *havo/vwo*-leerlingen verhelderend zou kunnen werken (we bedoelen een inleiding in de breuken binnen de algebra).
Anderzijds zouden nieuwe ontwikkelingen in het basisonderwijs, zoals ten aanzien van het oppervlaktebegrip[7]), goede aanwijzingen kunnen geven. We

hebben in 'Van A tot Z' niets kunnen vinden waaruit blijkt, dat de auteurs een studie hiervan gemaakt hebben. We achten het inmiddels hoog tijd dat schrijvers van wiskundeleergangen voor de onderbouw van het *havo/vwo* zich rekenschap geven van het feit, dat ze werken *in het gebied van wiskundeonderwijs voor 4 tot 16 jarigen*. Dit moet tot uitdrukking kunnen komen in het door hen geschapen materiaal.
Tenslotte maken we een opmerking over de *wiskundige achtergrond* van de aangeboden leerstof. Op enkele punten komen flarden van belangrijke wiskundige strukturen naar voren. Neutrale elementen ten opzichte van optelling, vermenigvuldiging en afbeelding worden bestudeerd en eveneens inverse elementen. Fundamentele eigenschappen als kommutativiteit (wisseleigenschap) en associativiteit zijn geduid en worden toegepast. Hoe dit alles past in een hogere struktuur, een weet voor de leraar, blijft voor de leerlingen in het duister. Welke *betekenis* zij aan deze zaken geven, of kunnen geven, is onduidelijk voor ons. Mischien kunnen de gebruikers-leraren-leerlingen hierop een antwoord vinden?
Met deze kritische noot besluiten we deze algemene beschouwing van de eerste zes deeltjes van de leergang 'Van A tot Z'. In de volgende paragrafen gaan we nader op enkele, voor deze methode essentiële zaken in.

f.g.

3 Analysen vanuit bijzondere standpunten

Inleiding

In de volgende paragrafen hebben de verschillende werkgroepsleden de methode 'Van A tot Z' op enkele essentiële aspekten geanalyseerd. Allereerst worden intuïtieve inleidingen, vanuit het standpunt van leerlingen, en niet beperkt tot meetkundige aktiviteiten, op de korrel genomen. Daar wiskundig bezig zijn op den duur juist niet alleen op basis van intuïtie moet geschieden, proberen we in dezelfde paragraaf na te gaan, hoe leerlingen tenslotte de wiskunde bedrijven (3.1).
Vervolgens wordt een gedeelte van de leergang beschouwd vanuit de 'nivotheorie', in de vijftiger jaren door Van Hiele, één van de auteurs van deze methode, ontwikkeld. Een beschrijving en een poging tot waardering van deze nivotheorie zijn belangrijke aspekten in deze paragraaf (3.2).
De essentie van telescoped teaching en de realisering daarvan in leerlingenopdrachten, worden in de derde paragraaf naar voren gebracht. Voorbeelden, rechtstreeks uit de boekjes, illustreren de uitspraken (3.3).
Tenslotte wordt getracht om 'het aanbrengen van inzicht' en 'het laten oefenen' naar inhoud en vorm tegen elkaar *af te wegen*. Deze paragraaf sluit aan op een uitgangspunt van de auteurs, dat zij als volgt aanduiden: *de uitbalancering van inzicht en oefening* (3.4).

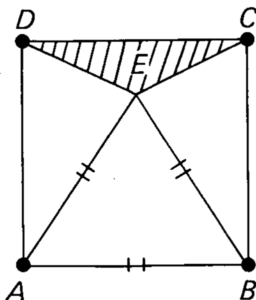
3.1 Via intuïtieve inzichten naar wiskundig denken

We nemen aan, dat het wiskundeonderwijs in de onderbouw van het vwo onder andere, en tot op zekere hoogte, naar het wiskundig denken van leerlingen voert. Dit betekent onder andere, dat leerlingen in staat zijn problemen systematisch aan te pakken, dat ze attent zijn op wetmatigheden en hieromtrent ook zekerheid willen hebben, dat ze ook strukturen van grotere omvang kunnen beschouwen en daarmee gaan werken.
Naast deze algemene doelstelling van het wiskundeonderwijs, zijn er meer specifieke (leer-)doelen aan te geven. Ze betreffen duidelijker de gegeven leerstof en zijn daardoor lokaler bepaald. Zo dient het onderbouwprogramma onder andere te leiden tot een funktioneel gebruik van vektoren in meetkundige problemen en het onderzoeken van lineaire en tweedegraadsfunkties van funk-

ties van één variabele.
Met de analyse van een serie schoolboeken wil men nagaan, hoe de betreffende auteurs zich voorstellen dat leerlingen dergelijke doelstellingen kunnen bereiken. In het geval 'Van A tot Z' blijken de auteurs grote waarde te hechten aan een intuïtieve inleiding, vooral met betrekking tot de meetkunde. Tracht men nu de leergang vanuit leerlingenaktiviteiten te doordenken, dan dient men (aanvankelijk) attent te zijn op mogelijke intuïtieve begrippen, redeneringen en inzichten, op basis waarvan de kinderen de aangeboden leerstof tegemoet treden. We zouden de methode 'Van A tot Z' tekort doen als we een dergelijke psychologisch-wiskundige doordenking ervan achterwege zouden laten.

Eindpunt

In deze paragraaf nodigen we de lezer dus uit om met ons vanuit het geschetste standpunt op didaktisch onderzoek te gaan. De zes deeltjes voor de onderbouw geven, naar onze mening, voldoende aangrijpingspunten.
Om eerst een beeld te vormen van inhoud, vorm en nivo van het wiskundig denken, waarop men met deze leergang mikt, beginnen we in het zesde deel, 3b. Daar vinden we een hoofdstuk getiteld 'Bewijzen en berekenen'. En omdat we als wiskundeleraren toch één van de hoogtepunten van wiskundig bezig zijn zien in het houden van deduktief opgebouwde redeneringen en omdat we deze vooral bij 'het bewijzen' aantreffen, zijn we geïnteresseerd in hetgeen dat hoofdstuk te bieden heeft. Neemt men aan, dat ook in de vorige deeltjes bewijzen geleverd zijn, of wellicht geleverde bewijzen meegedacht zijn door de leerlingen, dan mag men verwachten dat in dit hoofdstuk eerder opgedane ervaringen ekspliciet en bewust gemaakt worden.
De eerste opgave, en de beschouwing daarover, sterken ons in deze gedachte.



fig, 1

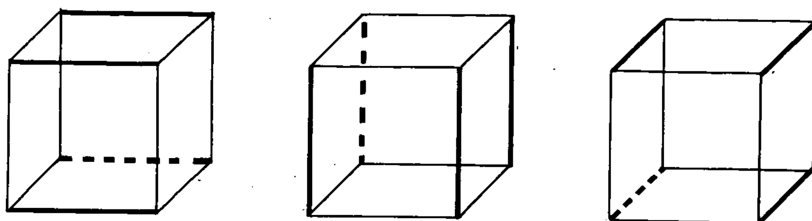
ABCD is een vierkant, *ABE* is een gelijkzijdige driehoek, waarvan *E* binnen het vierkant ligt.
Gevraagd wordt te bewijzen dat $\triangle DEC = 150°$.

De auteurs hebben deze bewijssituatie voor de leerlingen geanalyseerd. Onderscheiden worden 'premissen' en 'konklusies'. Tevens geeft men de essentiële elementen van de 'redenering', die van premissen naar konklusie moet voeren. Deze elementen worden bovendien zodanig puntsgewijs gepresenteerd, dat ook de redeneer*stappen* als het ware gegeven zijn. Hiermee moeten de leerlingen trachten te komen tot een eigen bewijsvoering, die wellicht nog

lastig genoeg is, maar die in werkelijkheid niet meer is dan een soort hogere orde invuloefening.
Vreemd genoeg worden middels deze beschouwing *over* bewijzen geen voorgaande bewijsvoeringen opnieuw beschouwd.[8]) We menen, dat een dergelijke aanpak aan het principe van telescoped reteaching een diepere zin had kunnen geven. Wel mogen de leerlingen in het vervolg van het hoofdstuk vrij lastige bewijsvoeringen trachten te houden. Zodra er meer dan één denkstap in de redenering wordt verlangd, zijn er aanwijzingen in die richting beschikbaar: gegevens worden geordend, te gebruiken regels, eigenschappen, stellingen genoemd en de redeneerstappen voorgezegd (voorgeschreven).
Binnen de beperking van een werkboek is deze sterk voorgeprogrammeerde aanpak te begrijpen, temeer als het werk van een wiskundeleraar voornamelijk gezien wordt als het uitleggen van moeilijke leerstof. Het is jammer, dat door het werkboekkarakter nu voor *alle* leerlingen deze uitleg als het ware *à priori* moet worden gegeven. We zullen, om een indruk te krijgen van het leren wiskundig te denken, in deze paragraaf vooral uitzien naar bewijsvoeringen, opbouw van redeneringen, afleiden van eigenschappen, regels, stellingen, het ordenen van gegevens, het doordenken van beweringen.

Beginpunt

Dat de inhoud van dergelijke wiskundige aktiviteiten bepaald wordt door onder andere begrippen, relaties tussen begrippen, grotere leerstofgehelen of schema's en theorieën, zijn we ons goed bewust. Het ligt dan ook voor de hand om eerst na te gaan hoe de auteurs zich voorstellen fundamentele wiskundige leerinhouden voor de leerlingen toegankelijk te maken. Citeren we hierbij één van de auteurs:[9])
'*Aan het denken gaat een fase van een schouwen in de situatie vooraf, dit is een fase waarin men de situatie ondergaat. In deze fase is reeds inzicht mogelijk*',
dan worden we genoopt onze analyse dit keer bij het prille begin van de intuïtieve inleiding aan te vangen. Daartoe slaan we deeltje 1a, voor de brugklas, op bij het eerste wiskundige probleem.
In het centrum van de aandacht staat hier de kubus, geïntroduceerd in de vorm van een dobbelsteen. Voorbijgaand aan voorgaande ervaringen betreffende het gebruik van een dobbelsteen (in de kontekst van huiskamerspelletjes) en daarbij gevormde opvattingen (en misvattingen, zoals het minder voorkomen van de uitkomst 'zes'), zonder dus dergelijke intuïtieve inzichten in dienst te stellen van het bestuderen van symmetrie (alle uitkomsten hebben evenveel kans) en homogeniteit (als de dobbelsteen niet vals is), wordt de dobbelsteen binnen de meetkunde gehaald en in die kontekst verkend.[10])
Binnen deze beperking blijkt de kubus veel gelegenheid te geven tot herkenning en ontdekking van wiskundige begrippen (grensvlak, ribbe, vierkant), relaties (aantal hoekpunten, zijvlakken en ribben) en struktuurtjes (hoe tel je de ribben). Vanuit psychologisch standpunt lijkt vooral het laatstgenoemde belangwekkend. Wat de leerlingen eigenlijk mentaal zouden moeten doen, wordt in het boek in keurige figuren gevisualiseerd:



figuur 2

Er vindt een 'omstrukturering'[11]) plaats, hetgeen, zoals vaker gebeurt, tot nieuwe en bruikbare inzichten leidt. Het intuïtieve begrip is dus door de auteurs beperkt (meetkunde) en specifiek opgevat. Wie Van Hiele's opvattingen kent, zal dat niet verbazen. In het eerder aangehaalde artikel (voetnoot) brengt hij het als volgt nog eens onder woorden:
'*De intuïtieve aanpak begint met het aanbieden van een intuïtieve struktuur. Deze struktuur moet de leerlingen aanspreken.*[12])

Intuïtieve wiskundige strukturen

Als belangwekkende intuïtieve struktuur beschouwt Van Hiele het orthogonale rooster (ruitjespapier). In de methode 'Van A tot Z' komt dit sterk tot uitdrukking, en we willen daarom ook nagaan in hoeverre het begrip vektor, en de daarmee verwante inzichten, volgens de leergang ontwikkeld worden.
Kort samengevat schatten wij de gang van zaken bij vektoren als volgt in. Het vierkantenrooster (kortweg rooster) dient eerst als stramien voor het tekenen van plaatjes. Bij het beschrijven van schuine (rechte) lijnen maakt men gebruik van een taal, die in de richting van kentallen wijst: 'twee opzij, één omhoog'. Hieraan wordt al spoedig het begrip richting gekoppeld, een trajekt op het rooster kun je beschrijven met getallen-parenkombinaties als $(-1, 1)$, $(2, 3)$ enz. Als daarna de translatie wordt geïntroduceerd, blijkt hetzelfde 'taaltje' bruikbaar. Vektoren worden zodoende beschrijvers van translaties op het rooster.
Evenwijdige lijnen, aanvankelijk genoemd in verband met spoorrails, die elkaar nooit ontmoeten (stond U wel eens tussen de rails?!), worden nu dragers van *gelijke* vektoren.
Het zal duidelijk zijn, dat er steeds sprake is van vrije vektoren, en het gelijk zijn slaat slechts op richting en grootte. Impliciet krijgt hierdoor het begrip driehoek iets algemeens. Niet alleen de getekende driehoek ondergaat door de translatie $(3, 5)$ een verschuiving, maar alle punten van het rooster. Hoe de leerlingen dit opvatten, laat zich door ons slechts raden.
Als men, heel mooi, de translaties gaat toepassen in de eendimensionale ruimte van de getallenlijn, komt deze algemeenheid echter wat eksplicieter naar voren: $x \to x + 4$. Toch laat men hier een kans liggen.[13]) Het begrip variabele, fundamenteel in het modern wiskundig denken, krijgt geen bewuste aandacht. Ook in het vervolg kan men deze omissie steeds weer konstateren.

Een nieuw begrip wordt naar voren gebracht: hoek. Dit gebeurt slechts in het licht van volgende leerstof (vele deeltjes verder, als de goniometrie wordt geïntroduceerd) Intuïtieve opvattingen of bekende ervaringen met het hoekbegrip, krijgen geen gelegenheid om naar voren te komen. De hoek tussen twee vektoren dient te worden gemeten langs de boog over een eenheidscirkel. We gaan op de (intuïtieve) aanpak van het hoekbegrip niet nader in.
Interessant is de volgende stap. Vektoren kunnen worden opgeteld. Het gaat om een bijzonder soort optelling, die begrepen kan worden tegen de achtergrond van het samenstellen van translaties. Anders gezegd: de optelling van vektoren $(\vec{v_1}+\vec{v_2})$ krijgt de betekenis in de samenstelling van translaties (nog niet genoteerd als $T_2 \circ T_1$). De aanwezigheid van een dergelijke isomorfie wordt, misschien is dit vanzelfsprekend, niet bewust gemaakt bij de leerlingen. Wellicht kan enige aandacht op dit punt nuttig zijn. Bij de introduktie van de nulvektor (voor de leerlingen niet gemotiveerd vanuit wiskundig standpunt) legt men namelijk wel verband met de wereld van de translaties. Heen- en terugschuiven langs dezelfde vektor heeft tot resultaat, dat (alle) hoekpunten weer in de uitgangspositie terecht komen. Zo te zien is er dan *niets* gebeurd. De vektor, die het resultaat beschrijft, is $\vec{0}$.
Vektoren hebben namen gekregen, we zagen dat hiervoor reeds. Kleine letters, met een pijltje erboven. Op het rooster zijn ze evenwel steeds bepaald, en hoewel $\vec{a}$ de indruk wekt van willekeurigheid (algemeenheid, variabel zijn) is het in dit geval (3, 2); (de notatie $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ wordt later ingevoerd):

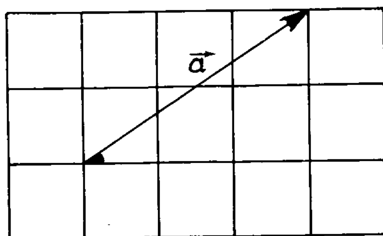
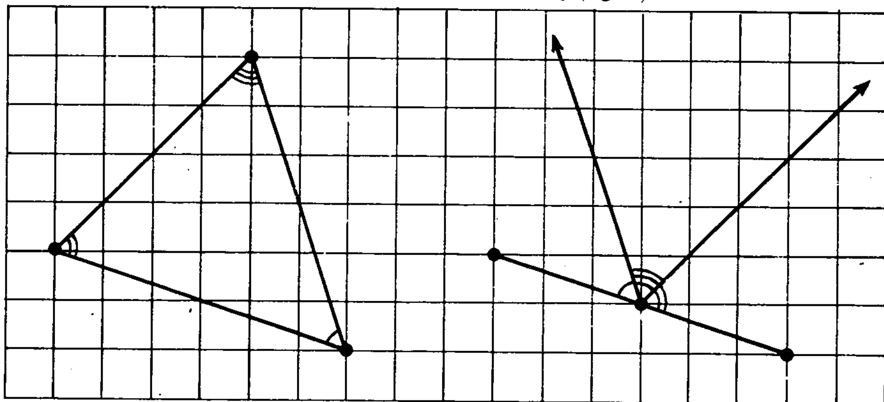


fig. 3

Ook het verschil van vektoren komt in de aandacht. Zonder enige relatie met de definitie van het verschil van twee getallen ('5 − 3 is het getal dat je bij 3 moet optellen om 5 te krijgen', verdient voor brugklassers zeker een bewustmaking), stelt men:
'*De vector die je bij $\vec{b}$ moet optellen om $\vec{a}$ te krijgen, noemt men $\vec{a} - \vec{b}$.*'
Ook het verband met translaties, dus de betekenis in een konkrete kontekst, blijft buiten beschouwing.
De eerder gesignaleerde schijn-algemeenheid komt nog pregnanter naar voren in de volgende 'verdeeleigenschap': $2(\vec{a}+\vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, te herkennen in het rooster. Wat 'eigenschap' evenwel betekent in dit kader, hoe algemeen deze wetmatigheid mag (moet) worden opgevat, komt niet uit de verf. Het lijkt, dat de auteurs hier met de materie geworsteld hebben. We kunnen tenminste niet veronderstellen, dat ze er zo maar aan voorbij gegaan zijn.[14]) Ook bij de

schakeleigenschappen $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ zien de leerlingen aan één voorbeeld dat het klopt.
Bij de 'wisseleigenschap' voor getallen redeneert men als volgt:
'*Je ziet:* $3 + 5 = 5 + 3$ ... *Bij een optelling mag je de volgorde* ...'
Voor vermenigvuldigen gaat men, op dezelfde induktieve wijze, iets sekuurder te werk, daar negatieve getallen hier toch een bijzondere rol hebben:
'*Wat is de uitkomst van* $7 \cdot (-2)$?
Wat is de uitkomst van $(-2) \cdot 7$?
Welke eigenschap lees je hieruit af?'
Daarna doet men hetzelfde voor $(-3) \cdot (-4)$ en $(-4) \cdot (-3)$ om te konkluderen:
'*De wisseleigenschap voor de vermenigvuldiging zegt dat voor alle getallen a en b geldt:* $a \cdot b = b \cdot a$.[15])
Tussen het gebruik van letters $(\vec{a})$ voor op het rooster bepaalde vektoren door, gebruikt men langzamerhand steeds meer letters voor (variabele) getallen:
'$a + b = b + a$, ... *ook* $p + q = q + p$ ..'
De leerlingen mogen het zelf dan nog doen voor de getallen (letters?) x en y.
De worsteling van de auterus in dit gebied van 'algemeenheid' en 'variabelen' wordt aardig zichtbaar in:
'*Duiden we een getal aan met de letter a, dan krijgen we* $3a + 5a = 8a$',
en even later:
'*Nog algemener:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$'
Als laatste aktiviteit van de brugklas (eind deeltje 1b) wordt de nevenvektor van een gegeven vektor ingevoerd. Het begrip 'loodrecht' krijgt hier een eerste invulling, onafhankelijk van de orthogonaliteit, die in de roosterstruktuur is gebakken.
In het begin van de tweede klas gaat men nog even terug naar fundamentele momenten uit de voorgaande lessen. Nu worden zaken evenwel eksakter geformuleerd:
'*Je ziet: alle vectoren* $k \cdot \vec{AB}$, *waarbij k ongelijk is aan 0* $(k \neq 0)$,[16]) *geven dezelfde richting aan.*'
Belangwekkend is ook de vraagformulering, die nu vaker voor gaat komen:
Hoe weet je dat de hoeken 1 en 3 gelijk zijn? Of bij (fig. 4):



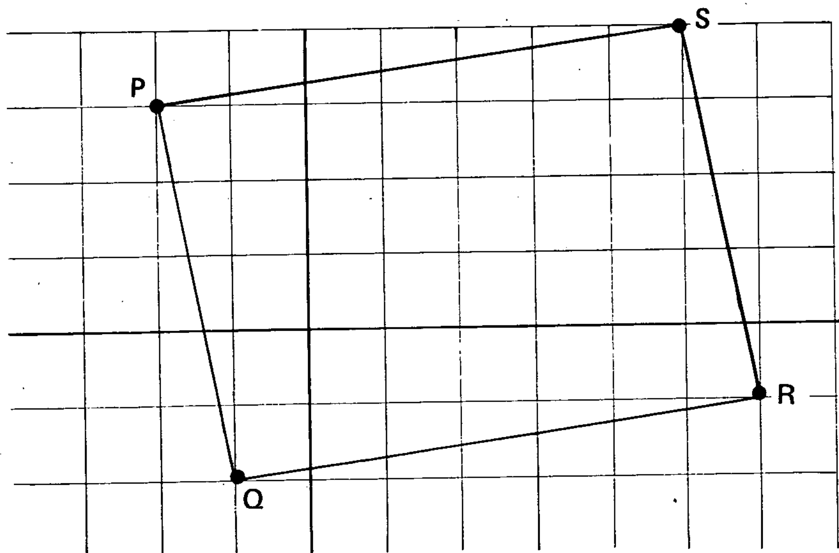
figuur 4 'Hoe weet je dat ...?'

Van Hieles gedachte over de intuïtieve grondslag van het bewijzen is hier zichtbaar didaktisch gerealiseerd:
'*Het begint ermee, dat de leerling konstateert, dat zijn geloof in de waarheid van zekere uitspraak verband houdt met zijn geloof in de waarheid van . . .*'[17])
We menen, dat deze gedachte belangwekkend genoeg is om ook, ekpliciet, aan de leerlingen over te dragen. Van dergelijke reflekties op het proces van wiskunde bedrijven, vonden we er in het werkboek geen. De waarheid, juistheid, algemeenheid, zinvolheid en toepasbaarheid van 'uitspraken' zou, naar onze mening, juist in het wiskundeonderwijs onder de aandacht van leerlingen moeten worden gebracht.
De loodrechte stand van vektoren, en het wetmatig verband tussen de kentallen van loodrechte vektoren, kan in dienst gesteld worden van een bewijs van de Stelling van Pythagoras. Dit gebeurt erg fraai in de methode. Met deze nieuwe kennis is het mogelijk om over de norm $|\vec{a}|$ van vektor $\vec{a}$ te gaan spreken. Waarom daarbij ook de driehoeksongelijkheid, weliswaar impliciete, maar toch grote aandacht krijgt, is ons niet duidelijk. Zowel de intuïtieve als de wiskundige betekenis hiervan ontgaat de leerlingen, naar onze mening.
In de volgende opdrachten, we hebben inmiddels de grens tussen klas twee en drie overschreden, komt steeds meer de vraag naar 'beredeneer' of 'laat zien' naar voren, bijvoorbeeld:

Beredeneer dat $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$,

of:

Bewijs dat PQRS geen rechthoek is:



figuur 5

De redeneringen, die bedoeld worden, vragen slechts om weinig (een, hoogstens twee) stappen. De behoefte aan een redenering, waartoe het laatste voorbeeld een prachtige gelegenheid geeft, wordt niet besproken (het lijkt net een rechthoek, je bent niet zeker. Wat is daaraan te doen?).
We zouden in bovenstaand geval kunnen spreken van lokale, en partikuliere bewijsvoeringen. Hieronder vallen ook redeneringen, die gebaseerd zijn op berekeningen.
Wat de algemene uitspraken betreft, onafhankelijk van bepaalde figuren, van het rooster, of van de metriek, zien we weinig ontwikkeling. Enkele uitspraken wijzen op een ontstane behoefte (bij de auteurs) eraan:
'*Men kan voor ieder punt P van het vlak schrijven* $\overrightarrow{OP} = k\vec{a} + m\vec{b}$, *waarbij k en m nader te bepalen zijn.*'
(In het licht van variabelen en algemeenheid een zekere contradictio in terminus).
Of:
'$\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} + t\vec{b} \ldots$, *waarin t een willekeurig element van* ℝ *is. Men noemt t een willekeurig element van* ℝ, *als men voor t ieder element van* ℝ *mag kiezen.*'
De vraag, hoe het idee van parameter hier door de leerlingen wordt opgevat (het begrip variabele kreeg in het voorgaande geen bewuste aandacht) is niet te beantwoorden. Wellicht kunnen we het nog vragen, voordat deze beschouwing gepubliceerd wordt.[18])
Het terrein van de vektoren wordt afgesloten met de introduktie van de eenheidsvektor $\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$, nauw aansluitend op een eerder geïntroduceerd begrip van hoek en ter ontsluiting van een nieuw werkterrein, dat van de goniometrie.

Terugblik

Kijken we kort terug op voorgaande, psychologisch getinte analyse, dan valt in de eerste plaats de specifieke interpretatie van 'intuïtief' op. Een interpretatie, die bovendien aanleiding is om alle wiskundige begrippen e.d. ook alléén binnen een wiskundige kontekst aan de orde te stellen. Hierdoor wordt wiskunde een gebied, dat vooral voor de leerling betekenis krijgt binnen het gebied zelf. Een zekere geïsoleerdheid (in psychologische zin) kan het gevolg zijn. Ook wat betreft de toepasbaarheid kan men zo zijn twijfels hebben, als de weg van eensporigheid op genoemde wijze wordt bewandeld. Maar ook binnen de wiskundige kontekst zijn niet alle problemen didaktisch opgelost. Vooral als het gaat om de algemeenheid van uitspraken, over het begrip variabele en over het generaliseren, blijven fundamenten van het wiskundig denken in het duister.
Toch kan men niet zeggen, dat de auteurs aan deze zaken voorbij zijn gegaan. Op diverse punten blijkt duidelijk, dat men de leerlingen een stapje verder wil brengen. Wellicht kunnen we beter zeggen: 'een trede hoger'. Daarmee komen we echter aan een volgende paragraaf, over nivo's van denken.

f.g.

3.2 Wiskundeonderwijs en nivotheorie

Inleiding

Het is opmerkelijk, dat leraren die de methode 'Van A tot Z' niet gebruiken, er vaak een negatief beeld van hebben. Als men vraagt, wat er slecht aan is, komt er dikwijls als antwoord: 'Het boek is zo rommelig' of 'opeenvolgende opdrachten vereisen soms zulke grote denkstappen, dat mijn leerlingen waarschijnlijk niet zelfstandig met het boek kunnen werken.'
We zijn ons gaan afvragen hoe het komt, dat je dit soort klachten veel minder van de gebruikers van de methode hoort. Ons vermoeden is dat het te maken heeft met de tamelijk afwijkende opbouw van het boek, die onder meer berust op de nivotheorie van Van Hiele. Daarop gaan we in deze paragraaf in.
Onze aanpak is hierbij als volgt. Eerst proberen we de methode te bekijken met de ogen van iemand, die er voor het eerst kennis mee maakt. Een aantal dingen lijkt dan op het eerste gezicht een beetje vreemd. Daarna bekijken we de methode tegen de achtergrond van de nivotheorie en dan zal blijken, dat deze theorie een geheel ander licht op de zaak werpt.
Laten we dus eerst eens proberen om kennis te nemen van de methode 'Van A tot Z', zoals iemand dat meestal doet. We pakken eens het eerste deeltje (HV-1a) en beginnen te bladeren. De inhoudsopgave vermeldt veel onderwerpen die bekend zijn voor de brugklas, maar ook zaken die weinig vertellen over de wiskundige inhoud. Waaraan moeten we bijvoorbeeld denken bij 'ijsbeer' en 'suikerbiet'? We gaan maar eens verder kijken.
Het eerste hoofdstuk heet 'dobbelsteen'. De leerlingen moeten zelf een dobbelsteen maken met behulp van een bijgeleverde bouwplaat en een aantal vragen beantwoorden, die te maken hebben met de ogen op die dobbelsteen. Dit alles komt over als een intuïtieve inleiding op de kubus. Het met de handen werken (materieel bezig zijn) kan daarbij uiteraard een belangrijke ondersteuning voor het denken zijn.
De tweede paragraaf van dit hoofdstukje toont verschillende uitslagen van een dobbelsteen en de leerling moet nagaan, welke uitslagen juist zijn (dat wil zeggen: van welke uitslagen een dobbelsteen te maken is, met de ogen op de juiste plaats). Het is duidelijk, dat dit bedoeld is om het ruimtelijk inzicht te vergroten. Het boek laat open hòe de leerling tot zijn konklusie moet komen. We kunnen ons voorstellen, dat dit tot spontane differentiatie leidt; sommige leerlingen kunnen over de uitslag denken, 'zien' wellicht in gedachten wat er gebeurt bij het vouwen van de uitslag, andere leerlingen zullen de ondersteuning van het konkrete handelen nodig hebben en die kunnen gaan vouwen en eventueel plakken.

1a, pag. 3

2 de uitslag van een dobbelsteen

In een klas werd gevraagd een uitslag van de dobbelsteen te maken en hieronder zie je hoe acht leerlingen hiermee, elk op hun manier, zijn begonnen.

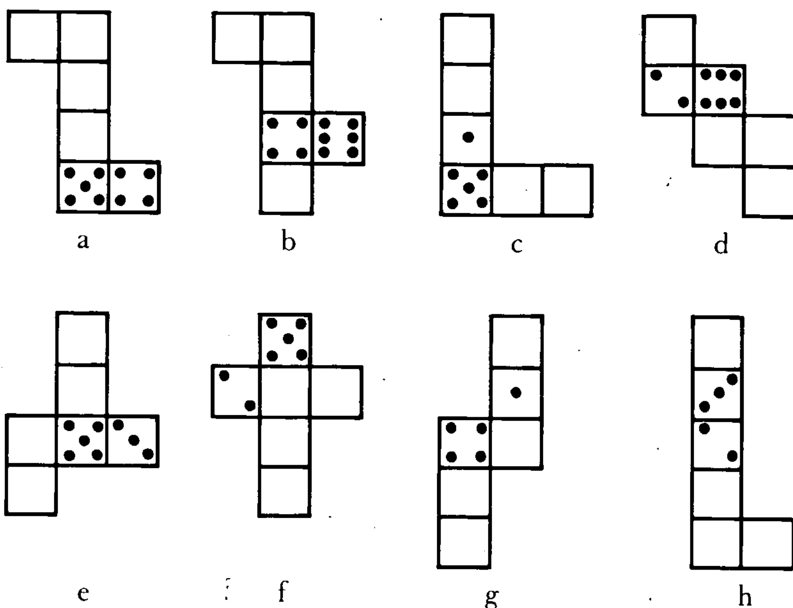


fig. 4

a/h Noteer van iedere uitslag in figuur 4a t/m h of hij juist of onjuist is. Als de uitslag onjuist is, schrijf dan op waarom.
Je noemt de uitslag van een dobbelsteen goed, wanneer bij het opvouwen de ogen op de juiste plaats komen.

i/m Teken de goede uitslagen van figuur 4 over op roosterpapier en zet er de ogen in op de juiste plaats. boek A2-13

De derde paragraaf gaat opeens over het gooien met twee dobbelstenen en over de kansen daarbij (in termen van meer/minder kans).
Pas in de vierde paragraaf komt de kubus aan de orde en de leerling leert nu enkele elementaire begrippen en eigenschappen daarvan.
De laatste twee paragrafen gaan over vierkant, rechthoek en ruit. Ze worden door middel van plaatjes ingevoerd. De leerling moet zelf ook veel tekenen, onder andere in figuren die afgemaakt moeten worden.

1a, pag. 7/8

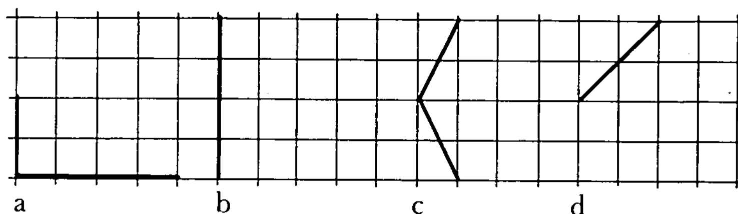


fig. 10

Neem figuur 10 over op roosterpapier.

c In figuur 10a zijn twee zijden van een rechthoek getekend.
Maak de rechthoek af.

d In figuur 10b is een zijde van een vierkant getekend.
Maak het vierkant af.

Dit eerste hoofdstukje lijkt eigenlijk al vrij rommelig: net als men verwacht dat de kubus ingevoerd zal worden, komt eerst het intermezzo met de kansen. Verder lijken de rechthoeken en ruiten er een beetje bij te hangen.
Laten we eens verderop in het boek kijken. We slaan deeltje 1a open bij hoofdstuk 13: afbeeldingen in het vlak. Dit is de eerste paragraaf:

1a, pag. 116:

1 spiegelen in de X-as

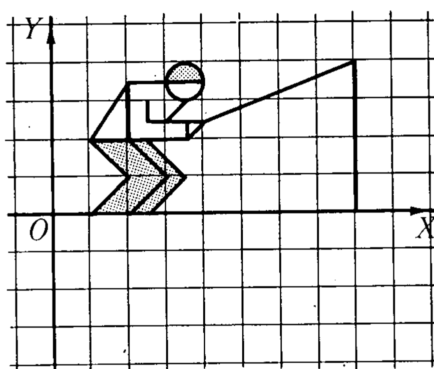


fig. 1

a Neem figuur 1 over op roosterpapier.

Het vissertje zit vlak bij het water en het is bladstil. Je ziet dus in het water een mooi spiegelbeeld.

b Spiegel de visser in de X-as.

c Je spiegelt het punt (8, 4) in de X-as.
Wat zijn de coördinaten van het beeldpunt?

d Je spiegelt het punt (a, b) in de X-as.
Wat zijn de coördinaten van het beeldpunt?

Onze eerste indruk is, dat dit wel erg hard gaat. Dan realiseren we ons, dat dit niet de eerste kennismaking met spiegelen zal zijn.
De tweede paragraaf gaat over spiegelen in de y-as en is even kort. Daarna komt veel uitgebreider het spiegelen in een punt (voorlopig alleen de oorsprong) aan de orde. Dus waarschijnlijk zal het spiegelen in een lijn al behandeld zijn. Eens kijken...
We bladeren terug naar hoofdstuk 3: 'spiegelen'. Daarin wordt inderdaad het spiegelen in een lijn geïntroduceerd. Dat gaat eerst met behulp van vouwen en

vervolgens dient het roosterpapier als hulpmiddel bij het tekenen van de ontbrekende helft van symmetrische figuren. Een assenstelsel en koördinaten zijn op dat moment echter nog niet ingevoerd, dus het spiegelen van een punt (a, b) in de x-as moeten we verderop zoeken...
Het is duidelijk, dat we op deze manier niet snel overzicht krijgen over het onderwerp spiegelen in een lijn. Oude gewoonten spelen een rol. Als we willen weten hoe een onderwerp in een wiskundeboek behandeld wordt, zijn we gewend in de inhoudsopgave dat onderwerp op te zoeken en we vinden dan meestal in het betreffende hoofdstuk de leerstof overzichtelijk bij elkaar. Het inzicht, dat deze 'logische' opbouw niet altijd de beste is voor iemand die het onderwerp moet leren, is nog niet zo oud. In het begin van de jaren zestig was de meetkunde op school ook nog aksiomatisch opgezet.
'Van A tot Z' poogt de wiskunde aan te bieden op een manier, die het beste aansluit bij de wijze waarop het leerproces bij de leerling verloopt. Dat vereist een andere instelling bij het beoordelen van zo'n methode. Daar gaan we nu nader op in.

'Van A tot Z' en de nivotheorie

Als we de introduktie van de kubus bekijken, dan valt op dat de leerling zijn eigen dobbelsteen moet plakken en aan dit tastbare voorwerp vervolgens allerlei dingen moet herkennen of ontdekken. In de eerste kennismaking met het spiegelen zien we eveneens het aspekt van de tastbaarheid en de visuele waarneembaarheid: de leerling moet figuren spiegelen door vouwen van het papier en door een spiegel te gebruiken. Dit heeft te maken met één van de belangrijkste principes van de nivotheorie, namelijk dat het voor een goed verlopend leerproces nodig is, dat de lerende voldoende tijd krijgt om zeer konkreet met een onderwerp bezig te zijn. Dat betekent, dat die eerste kennismaking zoveel mogelijk moet berusten op zintuigelijke waarneming. De leerling moet op iets tastbaars kunnen terugvallen of op een duidelijk waarneembare *struktuur*.
Als in hoofdstuk 4 het koördinatenstelsel wordt ingevoerd, biedt het ruitjespatroon van het schrift van de leerling zo'n struktuur. Het is een struktuur, die bovendien voor verschillende onderwerpen de zo nodige ondersteuning biedt, zoals spiegelen, vektoren, oppervlakte en kongruentie. Volgen we het onderwerp spiegelen door het eerste deeltje heen, dan zien we het haast in ieder hoofdstuk wel even terugkomen, en wel in een steeds verschillende kontekst. Voorbeelden: het spiegelen van letters, het maken van symmetrische figuren, zoals de gelijkbenige driehoek, het tekenen van symmetrie-assen van figuren, het spiegelen van een rechthoek, waarin één diagonaal is getekend. Toch is het steeds dezelfde struktuur van het ruitjespapier die de leerling houvast geeft. Dit is kenmerkend voor het zogenaamde *grondnivo:* de leerling doet veel verschillende ervaringen met hetzelfde onderwerp op, die alle konkreet zijn, dicht bij de zintuigelijke waarneming staan. De struktuur van het ruitjespapier kan daarbij als het ware worden tot een struktuur, die in het hoofd van de leerling zit en die de verschillende ervaringen verbindt.
In hoofdstuk 13, bij de opdracht met het vissertje, is er voor het eerst sprake van een vraag, waarbij de leerling een algemene eigenschap van spiegelen in de x-as

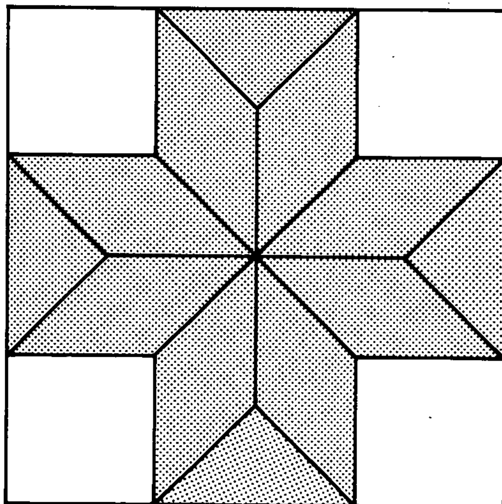
gaat abstraheren. Opdracht d) vraagt naar het beeldpunt van (a, b) bij spiegelen in de x-as. Nog steeds kan de leerling terugvallen op het ruitjespatroon, maar toch is dit de eerste stap in de richting van het denken en redeneren los van deze struktuur. Men zou zich bijvoorbeeld kunnen voorstellen, dat de leerling in een later stadium moet zeggen wat het beeldpunt van (a, b) is, als eerst in de x-as en vervolgens in de y-as gespiegeld wordt. Als die vraag dan beantwoord wordt zonder gebruik te maken van het ruitjespapier, maar door toepassing van de afzonderlijke resultaten, gevonden bij het spiegelen in de x-as ($(a, b) \rightarrow (a, -b)$) en in de y-as $(a, b) \rightarrow (-a, b)$, dan is er sprake van redeneren op het *eerste nivo.* Kenmerkend voor dit nivo is namelijk dat de leerling relaties ziet tussen elementen van het grondnivo, dat betekent in dit verband: algemene eigenschappen van het spiegelen.
Een ander kenmerk van het eerste nivo is het gebruik van vaktaal; de konkrete waarneming wordt losgelaten evenals de daarbij behorende intuïtieve noties: er wordt een geschikte taal gebruikt om de ontdekte verbanden tussen de aanvankelijk intuïtieve begrippen te beschrijven. Dat betekent, dat definities, stellingen en regels aan de orde komen. Vraag 1d) bij het vissertje is een eerste aanzet om de leerling op dit nivo te brengen:

1a, pag. 116:
'd Je spiegelt het punt (a, b) in de X-as.
Wat zijn de coördinaten van het beeldpunt?'

In het volgende paragraafje komt de overeenkomstige regel voor spiegelen in de y-as aan de orde. Daarna wordt het spiegelen in de oorsprong geïntroduceerd, evenals het spiegelen in de lijn $y = x$, en ook hierbij wordt steeds gekeken wat het beeldpunt van (a, b) is.
De auteurs gaan ook niet verder dan dat en waarschijnlijk hebben ze zich heel bewust beperkt. De leraar die nu aan zijn leerlingen zou vragen wat de regel is bij eerst spiegelen in de x-as en daarna in de y-as, zal waarschijnlijk merken dat veel leerlingen opnieuw gaan tekenen en dus op grondnivo bezig zijn. Dat neemt niet weg, dat er in zo'n geval sprake is van inzichtelijk handelen, het is namelijk handelen in een nieuwe situatie door gebruik te maken van een geschikte struktuur (weer het ruitjespatroon). Het zou echter voor de meeste leerlingen te hard gaan als men ze in dit stadium al zou willen dwingen tot een redenering op het eerste nivo. Misschien bereikt de leraar in het gunstigste geval dat de leerlingen deze redenering kunnen napraten, maar de vraag is of daarmee de weg naar het hogere nivo niet eerder bemoeilijkt is.
Het is dus van belang, dat 'Van A tot Z' dit onderwerp nu laat liggen en met iets anders verder gaat: men moet een nivo-overgang niet proberen te forceren. Na een paar 'prikjes' in die richting kan men de zaak beter laten rusten en de draad pas later weer oppakken (het principe van telescoped reteaching). Op de één of andere manier helpt zo'n rustperiode om meer afstand te nemen en het is juist het afstand nemen, dat nodig is voor een nivo-overgang. Immers, op een hoger nivo moet de leerling relaties leggen tussen de elementen van het nivo, waarop hij bezig was. Hij moet die elementen zelf dus als het ware loslaten.
Ook dit principe wordt volop toegepast in 'Van A tot Z'; voortdurend wisselen

verschillende onderwerpen elkaar af. Toch kan men ook weer niet zeggen dat er sprake is van verschillende 'stromen' door het boek, die niets met elkaar te maken hebben. Het boven besproken voorbeeld van het beeldpunt van (a, b) bijvoorbeeld, is niet los te zien van de 'funktiestroom', waarin de leerling geleerd heeft om met variabelen te werken. (Zoals we onder andere in 3.1 opmerken, hebben we echter twijfels over de opbouw van het variabele-begrip: hoe variabel is (a, b) voor de leerling? Verder is de stap van opgave c) naar opgave d) in onze ogen wel wat groot. Meer getallenvoorbeelden, eventueel met grote getallen, zouden wellicht nuttig geweest zijn).
Laten we tenslotte nog eens vanuit de nivotheorie naar het eerste hoofdstuk van 'Van A tot Z' kijken.
We hebben al gekonstateerd, dat de door de leerling geplakte dobbelsteen een konkrete ondersteuning biedt, die op het grondnivo nodig is. De paragraaf over het gooien met twee dobbelstenen krijgt in het licht van de nivotheorie ook een andere betekenis: het lijkt inderdaad nuttig om de leerling op deze manier wat meer grondnivo-ervaringen te geven met zijn dobbelsteen, voordat de kale kubus besproken wordt (en tevens is het een mooie start op grondnivo voor de 'kansrekening-stroom').
Als bij de kubus de begrippen grensvlak en ribbe aan de orde komen, hoeft de leerling weliswaar nog niet op eerste nivo te denken (omdat 'de kubus' voor hem 'zijn dobbelsteen' zal zijn), maar het is toch een eerste stap in de richting van het eerste denknivo: bij het tellen van het aantal ribben van de kubus is bijvoorbeeld sprake van het afleiden van een algemene eigenschap en wordt de intuïtieve kontekst van de dobbelsteen langzamerhand verlaten. Daarmee wordt dan tevens de overstap naar vierkant, rechthoek en ruit aan het eind van het hoofdstuk verklaard: het is een terugkeer naar het grondnivo, doordat deze figuren, die bij de kubus naar voren kwamen (het vierkant ekspliciet, de ruit en driehoek impliciet), in een ruitjespatroon getekend moeten worden. Deze grondnivo-benadering wordt aan het eind van het eerste hoofdstuk voortgezet met het bekijken van dergelijke figuren in een mozaïek (opnieuw dus een duidelijke struktuur):

1a, pag. 8:



Slot

Het is duidelijk, dat we, door vanuit de nivotheorie naar 'Van A tot Z' te kijken, tot een geheel andere kijk op het boek gekomen zijn dan bij de eerste lezing. Het wat rommelige karakter van het boek komt nu minder vreemd over: het is misschien meer het probleem van de leraar die gewend is zijn wiskunde overzichtelijk en vooral logisch geordend gepresenteerd te zien.
Blijft het feit, dat het boek minder geschikt is als naslagwerk voor de leerling; de auteurs noemen het ook niet voor niets een wiskunde-*werk*boek.
Enig zicht op de leerpsychologische overwegingen waarop 'Van A tot Z' berust, lijkt voor een gebruiker van het boek geen overbodige luxe. Men kan als leraar anders snel de fout in gaan. Bijvoorbeeld door leerstof, waarin een voorzichtige poging wordt gedaan om naar een eerste nivo te komen, op te vatten als minimumstof en die bij een proefwerk te toetsen. Daarbij moeten we wel bedenken dat dit risiko nog groter is bij een methode die minder rekening houdt met de nivotheorie.
Tenslotte nog een verantwoording. We hebben ons in deze paragraaf beperkt tot het eerste brugklasdeeltje van 'Van A tot Z'. Onze bedoeling was namelijk het verband duidelijk te maken tussen de opbouw van de methode en de nivotheorie. Daarvoor leverde dit deeltje voldoende materiaal.
De lezer, die geïnteresseerd is geraakt, zouden we willen aanraden eens een onderwerp door de gehele methode heen te volgen en verband te leggen met de nivotheorie. Het onderwerp 'funkties', dat in 'Van A tot Z' een belangrijke rol speelt, lijkt daarvoor heel geschikt.

f.k.

3.3 De inschuifherhaling of telescoped reteaching

Het voorwoord van deel 1a noemt een paar didaktische principes van de hele reeks. Het gaat ons in het onderstaande met name om:

'*3. Veel herhalingsopgaven volgens het systeem van de telescoped reteaching.*
5. Ieder onderwerp wordt meerdere keren van de grond af behandeld.'

Over dit beginsel schrijft Van Hiele:[19])

'*Terwille van de overzichtelijkheid van de totale leerstof en ook terwille van de samenhang, zal de docent graag een onderwerp, wanneer dit eenmaal aangesneden is, uitputtend willen behandelen. Van didaktisch standpunt is deze handelswijze verwerpelijk. De leerling verwerft het meesterschap over een onderwerp veel beter, wanneer hij dit onderwerp vele malen en in telkens meer verdiepte vorm ontmoet, dan wanneer hij slechts eenmaal de kans krijgt het eindpunt te bereiken.*'

Dit beginsel houdt meer in dan alleen maar het herhalen van begrippen, waarop

je na een paar maanden terugkomt, om ze in de herinnering van je leerlingen terug te roepen. Het boek volgt een doordachte, stelselmatige aanpak:
- in een les komen nooit meer dan twee echt nieuwe dingen voor, en als het er twee zijn, worden ze nog niet met elkaar in verband gebracht;
- vervolgens blijft het onderwerp enige tijd rusten, om het te laten bezinken;
- wanneer het terugkomt, wordt het opnieuw van de grond af opgebouwd; alleen is de uitleg nu korter (als het ware ineengeschoven). Bovendien worden verschillende begrippen die toen nieuw waren, nu wel met elkaar verbonden.

Om na te gaan hoe dit beginsel uitgewerkt is, hebben we het begrip inverse funktie in de eerste vier deeltjes gevolgd. Funkties zijn voor de hele reeks een soort grondvorm (zoals het rooster in de meetkundige opbouw); er wordt van alles mee verbonden: tegengestelden van gehele getallen, vermenigvuldigen met negatieve getallen, vergelijkingen oplossen, rekenen met breuken en kwadraten en wortels, groter en kleiner.
Over de inverse van een funktie zegt de toelichting bij 1a les 7 (waar ze voor het eerst verschijnen):

'*Dit begrip is van zeer grote betekenis. Het speelt een zo grote rol in dit werkboek dat U niet van het onderwerp moet afstappen voordat U de indruk heeft dat vrijwel alle leerlingen dit beheersen.*'

Ze worden wezenlijk gebruikt bij het oplossen van vergelijkingen. We zullen proberen een beeld te geven van de lessen waarin dat gebeurt.

a) 1a les 6 verbindt dingen die bij elkaar horen, door er pijlen tussen te trekken of door ze in tabellen te rangschikken. Eerst koppelen de schrijvers woorden (handbal hoort bij sport), daarna getallen (14 hoort bij 18 door de afspraak 'tel er 4 bij'). De naam funktie valt nog niet, wel origineel en beeld. Een opgave is:

1a, pag. 58:

c Het voorschrift is „tel er 6 bij". Zoek bij de beelden het goede origineel:

origineel		*beeld*	*origineel*		*beeld*
...	→	19	...	→	100
...	→	8	...	→	104
...	→	25	...	→	106
...	→	33	...	→	119
...	→	68	...	→	135

d Het voorschrift is „tel er 8 bij". Vul de tabel in:

origineel	15		22		89		113		164	
beeld		15		22		72		200		46

Wie het vervolg kent, ziet hier in feite alles al beginnen: de inverse van een funktie en het oplossen van een vergelijking.

b) 1a les 7 leert: een voorschrift, zoals 'ter er 5 bij' of 'vermenigvuldig met 3' noemt men een funktie. Na een reeks oefenvoorbeelden, die de schrijfwijze $x \rightarrow x + 5$ gebruiken, wordt de inverse van een funktie genoemd (nog niet omschreven):

1a, pag. 66:

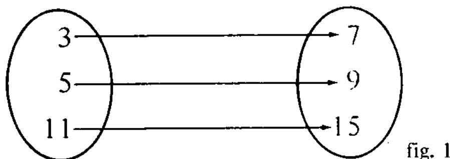


fig. 1

Hierboven is een plaatje getekend bij de functie $x \longrightarrow x + 4$.
Het voorschrift is dus „tel er 4 bij".
In de zwarte haal staan de originelen 3, 5 en 11. In de rode haal staan de beelden 7, 9 en 15.[20])
Dat bij het origineel 3 voor het voorschrift „tel er 4 bij" het beeld 7 behoort zie je in het plaatje aan de pijl.

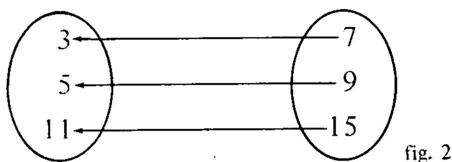


fig. 2

In de figuur hierboven zijn 7, 9 en 15 in de zwarte haal de originelen. De beelden zijn 3, 5 en 11 in de rode haal.
Dat bij het origineel 7 het beeld 3 behoort zie je aan de pijl.
De functie die hierbij behoort is $x \longrightarrow x - 4$.
Het voorschrift is dus „trek er 4 af".

Men noemt de functies $x \longrightarrow x + 4$ en $x \longrightarrow x - 4$ elkaars *inverse*.
De functie $x \longrightarrow x - 4$ is de inverse van de functie $x \longrightarrow x + 4$.

Het woordgebruik is schijnbaar achteloos:

'*Dat bij het origineel 7 het beeld 3 hoort zie je aan de pijl*',

en:

'*Men noemt de funkties $x \rightarrow x + 4$ en $x \rightarrow x - 4$ elkaars inverse.*'

Meer niet. Hier wordt geleerd op het grondnivo.

c) 1a les 14 (een tijd verder dus) herhaalt eerst de nomogrammen.[21]) Die zijn ook in les 7 ingevoerd, maar werden daar nog niet met de inverse funktie verbonden. Dat gebeurt nu wel. De inverse wordt helemaal opnieuw geleerd en niet eens zoveel vlugger dan toen, maar terwijl het in les 7 met pijlenfiguren ging, gebruikt les 14 nomogrammen. De omschrijving luidt:

'*Bij de inverse van* $x \rightarrow x + 3$ *worden origineel en beeld verwisseld.*'

Deze zin is nieuw: in les 7 stond alleen getekend dat de pijlen werden omgekeerd; hier wordt de handeling in woorden weergegeven.

d) 1b les 15 zet origineel en beeld in getallenparen en tekent de grafiek van een funktie. Geen woord over inversen.

e) 1b les 16 kun je lezen alsof er nog nooit iets over inverse funkties gezegd is; alles is herhaling, alleen het gebruik van getallenparen is nieuw:

1b, pag. 10:

Van een functie is het voorschrift „vermenigvuldig met 4".
Je kunt ook schrijven $x \longrightarrow 4x$.

a Hoe schrijf je deze functie met x en y?

Van de functie $x \longrightarrow 4x$ kun je de volgende tabel maken:

origineel x	*beeld* y	*getallenpaar* (x, y)
-2	-8	$(-2, -8)$
-1	-4	$(-1, -4)$

b Neem de tabel over en vul deze aan voor de originelen 0, 1 en 2.
c Teken het nomogram van de functie $x \longrightarrow 4x$.
Neem als originelen $-2, -1, 0, 1$ en 2.

Je krijgt de inverse functie van $x \longrightarrow 4x$ door origineel en beeld te verwisselen. Hierbij behoort de volgende tabel:

origineel x	*beeld* y	*getallenpaar* (x, y)
-8	-2	$(-8, -2)$
-4	-1	$(-4, -1)$

d Neem de tabel over en vul deze aan met de beelden 0, 1 en 2.
Zoek daar de originelen bij en vul de getallenparen in.

Bij de tabel behoort het voorschrift „delen door 4".

e Op welke twee andere manieren kun je deze functie noteren?
f Teken het nomogram van de functie „delen door 4".
Neem als beelden -2, -1, 0, 1 en 2.

Je kunt het nomogram van opgaaf **f** ook krijgen uit het nomogram van opgaaf **c** door alle verbindingspijlen om te draaien.

Na nog een aantal voorbeelden, worden de grafieken van een funktie en haar inverse in één rooster getekend, en wordt er verband gelegd met spiegelen in $y + x$.

f) 1b les 34 begint zo:

1b, pag. 100:

De functie $x \longrightarrow 5x$ heeft als voorschrift „vermenigvuldig met 5".
Als het origineel 2 is dan is het beeld 10.
Als het beeld 50 is dan is het origineel 10.

a Wat is bij deze functie het origineel als het beeld 525 is?
b Wat is bij deze functie het origineel als het beeld -10 is?

Je vindt het origineel terug door de inverse functie toe te passen.
De inverse van de functie „vermenigvuldig met 5" heeft als voorschrift „deel door 5".
Je kunt ook schrijven $x \longrightarrow \frac{x}{5}$.

Je kunt niet meer zeggen dat hier het begrip inverse funktie van de grond af wordt opgebouwd. Kennelijk vinden de schrijvers dat dit nu vaak genoeg gebeurd is. Hier wordt alleen zoveel herhaald als straks nodig is voor het invoeren van vergelijkingen. Nieuw is wel het vinden van de inverse van een samengestelde funktie:

1b, pag. 101:

De functie $x \longrightarrow 5x + 3$ heeft als voorschrift „vermenigvuldig eerst met 5, tel daarna 3 op".
Als het origineel 2 is, dan is het beeld 13.

a Wat is bij deze functie het beeld als het origineel 8 is?

Als je bij het beeld 18 het origineel moet terugvinden bij de functie $x \longrightarrow 5x + 3$ dan maak je gebruik van een nomogram.

In het nomogram van figuur 1 lees je af dat je van het origineel naar het beeld komt door *eerst* 5 maal te nemen en *daarna* 3 op te tellen.

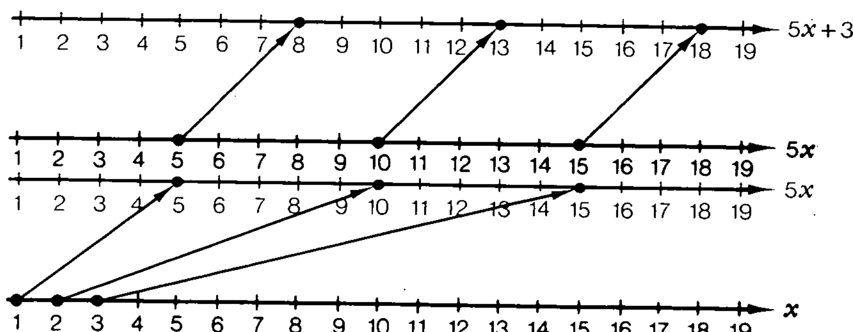


fig. 1

In het nomogram van figuur 2 lees je af dat je van het beeld naar origineel komt door *eerst* 3 af te trekken en *daarna* door 5 te delen.

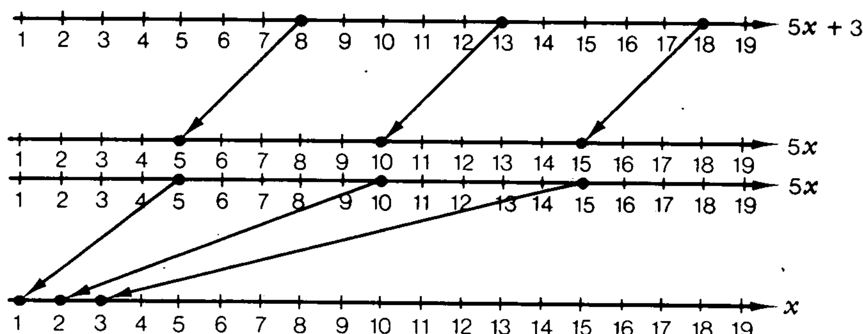


fig. 2

De inverse functie van $x \longrightarrow 5x + 3$ heeft als voorschrift „trek eerst 3 af, deel daarna door 5".

Je kunt ook schrijven $x \longrightarrow \frac{x - 3}{5}$.

Hierna hebben de schrijvers alles in stelling gebracht om het begrip vergelijking aan te kunnen pakken:

1b, pag. 103:

Van de functie $x \longrightarrow 5x$ is het beeld 15.
Gevraagd wordt het origineel.
Je schrijft dan $5x = 15$.
Je vindt het origineel door de inverse van de functie „vermenig-

vuldig met 5" toe te passen.

a Wat is in woorden de inverse functie?
Hoe noteer je deze inverse functie?
Wat is het origineel dat behoort bij het beeld 15 ?

Als gegeven is de *vergelijking* $2x = 16$, dan is de functie toegepast „vermenigvuldig met 2".
Je vindt het origineel door de inverse van de functie „vermenigvuldig met 2" toe te passen.

b Wat is in woorden de inverse functie?
Hoe noteer je deze inverse functie?
Wat is het origineel dat behoort bij het beeld 16 ?

g) Deel 2a herhaalt zowel inverse funkties als vergelijkingen. Beide worden weer helemaal van het begin af opgezet, maar nu sterk verkort. Aan het oplossen van vergelijkingen wordt verder gewerkt, maar aan de inverse wordt niet echt iets nieuws toegevoegd. Dit begrip is ver genoeg ontwikkeld om het inzien van wat een vergelijking is te ondersteunen. (Bij het oplossen van tweedegraads vergelijkingen komen de inverse funkties op dezelfde wijze terug).

Dit is een voorbeeld hoe de inschuifherhaling (telescoped reteaching) werkt. Telkens wanneer de inverse funktie ter sprake komt, wordt zij met één nieuw begrip verbonden: origineel en beeld, nomogram, grafiek (en zijdelings spiegelen), samengestelde funktie, vergelijking. Stelselmatig proberen de schrijvers een leerling in staat te stellen tussen al die onderwerpen een relatienet op te bouwen. Daartoe beginnen ze iedere keer weer van de grond af: zolang dat relatienet nog te zwak is en een leerling vast nog niet kan praten over de betrekkingen tussen al die begrippen, mag hij terug naar de aanschouwelijke handeling die aan de inverse ten grondslag ligt: origineel en beeld verwisselen door een pijl andersom te trekken of een getallenpaar om te keren. Hier is uitgewerkt, wat Van Hiele schrijft:[22])

'De denknivo's zijn niet uitgedacht om daarmee een zware theorie op te zetten. We hebben ze ter sprake gebracht om er iets mee te gaan doen. Je kunt ze bij het opzetten van een leermethode gebruiken door:
1. *zo lang mogelijk in eenzelfde struktuur van het nulde nivo te laten opereren;*
2. *de veralgemenigen die uit deze strukturen voortvloeien zeer geleidelijk te uiten. Volgens het schema: struktuur nulde nivo – veralgemening – struktuur nulde nivo – iets uitgebreider veralgemening – struktuur nulde nivo. Dit is de telescoped reteaching;*
3. *bij het gebruik van symbolen telkens weer terug te gaan naar de visuele struktuur waar ze op slaan. Hierdoor wordt het mogelijk een struktuur van het eerste nivo op te bouwen waarin de symbolen een plaats hebben . . .'*

Volgens 'Van A tot Z' is een vergelijking niets anders dan de vraag naar een origineel van een gegeven beeld; het oplossen bestaat in de overgang op de inverse funktie. Dit is een heel eigen aanpak, sterk afwijkend van andere boeken. Leraren, die voor het eerst uit deze reeks gaan lesgeven, zullen er nogal aan moeten wennen (en dat houdt vaak in: een onderwerp anders durven uitleggen dan je zelf vroeger geleerd hebt).
En toch staat deze werkwijze niet zo ver af van de gebruikelijke. Dat komt omdat een funktie wordt omschreven als een voorschrift (zoals 'trek er 5 af', 'deel door 2'), dus als een opdracht iets met een getal te doen. Gewoonlijk bestaat het oplossen van een eerstegraadsvergelijking ook uit een aantal opdrachten ('trek van beide leden 5 af', 'deel beide leden door 2'), alleen worden die niet als funkties gezien. Vanuit dit gezichtspunt is er verbazend weinig verschil.

Een voordeel van 'Van A tot Z' lijkt ons, dat vergelijkingen niet een losstaand verzinsel zijn (zoek een getal dat voldoet aan een eis die uit het niets verschijnt), maar een vraag die tamelijk vanzelfsprekend uit het funktiebegrip voortkomt. Het oplossen is geen op zichzelf staande rekenwijze, maar wordt verankerd in inversen. Dat is zowel een steun bij het leren (het is prettig als denkbeelden die je in je op moet nemen, onderling verband vertonen), als bij het onthouden (door de samenhang met inverse funkties roep je het oplossen van vergelijkingen duidelijker in je geheugen terug).

De opzet die 'Van A tot Z' volgt, heeft ook een paar nadelen. Het is niet mogelijk de vergelijking $2x + 7 = 5x - 3$ op deze wijze aan te pakken. Zij wordt opgelost door de inverse funkties los te laten en toch weer, als vanouds, van beide leden iets af te trekken. We kregen de indruk, dat de schrijvers dit zelf ook als een schoonheidsfout hebben ervaren.
In de tweede plaats vraag je je een beetje bang af, hoe leerlingen tijdens een natuurkundeles vergelijkingen moeten oplossen. We denken bijvoorbeeld aan vraagstukken over soortelijke massa en volumen, waarbij het toch tamelijk lastig is voortdurend aan inverse funkties te denken (zeker voor de natuurkundeleraar, die 'Van A tot Z' niet kent). Leerlingen moeten dan wel in verwarring raken.
Overigens zegt dit laatste bezwaar meer over de spreekwoordelijke gebrekkige wijze waarop wiskunde- en natuurkundeleergangen op elkaar afgestemd zijn, dan over 'Van A tot Z'. De zorgvuldigheid, waarmee daarin het leren van een nieuw begrip doordacht en uitgewerkt is, wint het van de nadelen.

m.d.

3.4 Inzicht en oefening

In het voorwoord bij de methode noemen de schrijvers als één van hun uitgangspunten: uitbalancering van inzicht en oefening. In deze paragraaf willen we wat nader op deze aspekten van het wiskundeonderwijs ingaan. We zullen nagaan hoe deze aspekten in 'Van A tot Z' zijn verwerkt en proberen onze visie daarop te geven.
Hoezeer wiskundedocenten ook zullen verschillen in wat ze met hun leerlingen

wensen te bereiken en langs welke wegen, steeds zullen de elementen 'inzicht in... bijbrengen' en 'oefenen in...' op de een of andere wijze vertegenwoordigd zijn.
We willen een kader geven om binnen dat kader de begrippen 'inzicht' en 'oefening' die betekenis te kunnen geven, die wij – althans in deze paragraaf – aan deze begrippen hechten. In de loop van de beschrijving van dit kader, zullen ook de begrippen 'vaardigheid', 'begrijpen', 'inoefenen' en 'toepassen' een plaats krijgen.
Dit kader illustreren we aan het volgende voorbeeld:[23])

1b, pag. 146/147:

Hieronder is zwart getekend een molenwiek $ODCBA$ die over een hoek van 90° wordt gedraaid om punt O tegen de wijzers van de klok in.
De molenwiek komt dan in de stand $OD_1C_1B_1A_1$.
In plaats van de originele vector $\vec{OD} = (2, 0)$ krijg je de beeldvector $\vec{OD_1} = (0, 2)$.

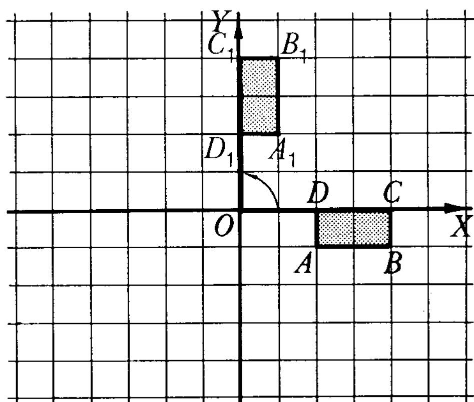


fig. 1

a Wat zijn de kentallen van de originele vector $\vec{OA}$?
Wat zijn de kentallen van de beeldvector $\vec{OA_1}$?
b Wat zijn de kentallen van de originele vector $\vec{OB}$?
Wat zijn de kentallen van de beeldvector $\vec{OB_1}$?

In plaats van de originele vector (x, y) krijg je bij draaiing om het punt O over een hoek van 90° tegen de wijzers van de klok in de beeldvector $(-y, x)$.
Dus in plaats van de originele vector $(2, 5)$ krijg je bij deze rotatie de beeldvector $(-5, 2)$.
In plaats van de originele vector $(-2, -3)$ krijg je de beeldvector $(3, -2)$.

Bij de volgende opgaven wordt gedraaid over een hoek van 90°

om het punt O tegen de wijzers van de klok in.
Geef de kentallen van de beeldvector, als de originele vector is:

c (1, 2)
d (3, 5)
e (− 2, 3)
f (2, − 4)
g (3, − 2)
h (− 3, − 4)

Men noemt de vector $(-y, x)$ de *nevenvector* van de vector (x, y). Als (x, y) verschilt van de nulvector, dan is de nevenvector van (x, y) loodrecht op de vector (x, y).

i Neem figuur 1 over op roosterpapier.
Draai de molenwiek $OD_1C_1B_1A_1$ over een hoek van 90° om O tegen de wijzers van de klok in.
Teken de beeldfiguur $OD_2C_2B_2A_2$.
j Draai de molenwiek $OD_2C_2B_2A_2$ over een hoek van 90° om O tegen de wijzers van de klok in.
Teken de beeldfiguur $OD_3C_3B_3A_3$.

De leerlingen leren hier het begrip 'nevenvektor'. Hebben ze dit begrip, na het maken van deze opdrachten, óok begrepen? Het antwoord op deze vraag hangt af van wat de vraagsteller met het woord 'begrijpen' bedoelt.
Verwacht de vraagsteller als antwoord instemmend geknik?
Verwacht hij dat een leerling het in zijn of haar eigen woorden omschrijft (eventueel gebruikmakend van een voorbeeld)?
Verwacht hij dat een leerling op de vraag: 'Teken de lijn die door het midden van het lijnstuk AB gaat, $A(2, 3)$ en $B(6, 5)$, en er loodrecht op staat met behulp van nevenvektor', de juiste handelingen uitvoert en er het goede verhaal bijvertelt?

In al de drie geschetste situaties is sprake van 'begrijpen'. De eerst gegeven soort willen we aangeven met receptief begrijpen, de tweede soort met reproduktief begrijpen en de derde soort met inzicht. Voor het kader, waarbinnen we onze beschouwingen willen uitvoeren, kunnen we met de tweede en de derde soort volstaan. We zullen hier niet proberen een eksakte definitie te geven van inzicht. Wel zullen we aangeven hoe je kan konstateren of iemand inzicht heeft; of anders gezegd wat een leerling doet die inzicht heeft.[24])
In 'Begrip en Inzicht'[25]) schrijft Van Hiele:

'*Een leerling die in een nieuwe situatie adekwaat en intentioneel handelt, vertoont inzicht.*'

Ter toelichting voegen we nog het volgende toe: het moet om een nieuwe situatie gaan. Iemand die een goed antwoord geeft op wat voor hem een roetineprobleem is, toont daarmee nog geen inzicht. Hij kan het best hebben, maar het blijkt niet uit wat hij doet. Het kan klakkeloze kennis zijn.[26])
De leerling moet adekwaat handelen. Als iemand hulpmiddelen gebruikt bij het oplossen, die weliswaar tot de oplossing leiden, maar omslachtig zijn, dan

handelt hij niet adekwaat en toont dus nog geen inzicht. Ook moet de leerling intentioneel handelen. De keuze voor de meest doelmatige en doelgerichte werkwijze mag niet op toeval berusten. Adekwaat en intentioneel handelen gaan nauw samen, maar hoeven niet noodzakelijk afhankelijk te zijn.

We komen nu terug op de vraag, of een leerling het begrepen heeft na het maken van de opdrachten a) tot en met h).
Van inzicht tonen kan nog geen sprake zijn. Er is de leerlingen geen enigszins nieuwe situatie aangeboden, waarin hij adekwaat en intentioneel met het begrip 'nevenvektor' kan opereren. Wel is er sprake van reproduktief begrijpen bij die leerlingen die de opdrachten c) tot en met h) korrekt hebben uitgevoerd: zij zijn in staat de verstrekte informatie in situaties, die nauw aansluiten bij die waarin ze het geleerd hebben, goed te handelen. Wij zijn er ons van bewust, dat het geven van de goede oplossingen geen garantie is dat zij het begrepen hebben op reproduktief nivo. Dat kan wel goed blijken in een (klasse-)gesprek, maar daarvoor is binnen de beperking van het werkboek weinig ruimte.

We willen nu onze analyse voortzetten in de richting van het begrip oefenen. Opgaven zoals c) tot en met h) zijn erop gericht om iets wat net geleerd is, in te oefenen. Dit inoefenen is het eerste aspekt van wat wij onder oefenen wensen te verstaan in deze paragraaf.
Om een ander aspekt te kunnen belichten, willen we eerst weer een voorbeeld geven:

1b, pag. 148 (niet alle opdrachten zijn opgenomen):

b Teken in een assenstelsel de punten $A = (1, 3)$ en $B = (5, 1)$. Gevraagd wordt de middelloodlijn van het lijnstuk AB te tekenen.
c Wat zijn de coördinaten van het midden van het lijnstuk AB ?
d Wat zijn de kentallen van de vector $\vec{AB}$?

De middelloodlijn van het lijnstuk AB staat loodrecht op het lijnstuk AB. De richting van de middelloodlijn is dezelfde als de richting van de nevenvector van de vector $\vec{AB}$.

e Teken in de figuur van opgaaf **b** de middelloodlijn van het lijnstuk AB.

Het leren van begrippen, stellingen, werkmethoden in de wiskunde mag naar onze mening niet stoppen op het moment, dat deze op reproduktief nivo begrepen zijn. Je leert ze om ze te kunnen gebruiken, anders hoef je ze niet te leren. Dit heeft tevens het voordeel, dat het de motivatie van de leerlingen voor het vak bevordert: je leert niet alleen, maar je hebt er ook nog wat aan.
In de opdrachten hierboven wordt het begrip 'nevenvektor' gebruikt om de middelloodlijn van een lijnstuk te tekenen. Helaas (in onze ogen althans) krijgen de leerlingen hier niet de gelegenheid om te laten zien, dat ze inzicht in het begrip

nevenvektor hebben door ze uit te dagen de hier gegeven voorstrukturering zelf uit te voeren.
In dat geval hadden ze in een nieuwe situatie (die van de middelloodlijn) adekwaat (door de nevenvektor te gebruiken) en intentioneel (bewust) het geleerde toegepast. Dit toepassen[27]) (anders gezegd : wat je geleerd hebt inzichtelijk hanteren), is voor ons een essentieel onderdeel van oefenen.

Voor de leerlingen gaat de paragraaf dan verder met het inoefenen van het tekenen van de middelloodlijn met behulp van de nevenvektor. De middelloodlijn wordt vervolgens gebruikt om de omgeschreven cirkel van een gegeven driehoek te tekenen. Toch willen we ook hier niet van toepassen in de hiervoor gegeven zin spreken, omdat de situatie weer volledig is voorgestruktureerd en de leerlingen niet de gelegenheid krijgen hun verworven inzicht te tonen. Vanuit de opzet met een werkboek is dit natuurlijk volledig te begrijpen, maar wij vinden deze beperking toch wel een verarming van wiskundeonderwijs.

Als laatste onderdeel van deze paragraaf willen we ingaan op het begrip 'vaardigheid'.
Vaardigheden hebben in onze visie alles met begrijpen, inoefenen, inzicht en toepassen te maken. Voordat we hier verder op ingaan, laten we Van Hiele hierover zelf aan het woord. In 'Begrip en Inzicht'[28]) schrijft hij:

'*Wiskunde is een vak, waar inzicht doel is. Vaardigheid is daar dikwijls middel om dat doel te bereiken... Men is met wiskunde bezig, als men tracht nieuwe problemen tot reeds bekende te herleiden.*
Niet het aanleren van rekentechnieken is doel van het wiskundeonderwijs, maar de wiskunde ontwikkelt wel het vermogen om zich spoedig rekentechnieken eigen te maken... Daar vaardigheid slechts middel en niet zelfstandig doel is, kan een langdurig (in-)oefenen automatisch gaan verlopen en wel zo, dat daarbij het inzicht in de handeling verloren gaat. Men sluit dan de weg af om tot een hoger inzicht te komen, omdat daarvoor het begrijpen van de eigen handeling noodzakelijk is. (Wij zouden liever zeggen: bij langdurig inoefenen gaat begrijpen op reproduktief nivo verloren. Dit blokkeert de mogelijkheid om tot inzicht te komen). Verkregen inzicht doet leerstof beklijven. Wanneer door gebrek aan oefening de vaardigheid geheel verdwenen is, kan inzicht de verloren handeling weer terugroepen.'

Wij zouden hier aan willen toevoegen dat iemand, die vaardigheid[29]) in iets heeft, inzichtelijk kan handelen door geleerde kennis toe te passen. Wij zouden dit willen stellen tegenover het handelen van iemand, die slechts klakkeloos iets geleerd heeft; dit soort handelen willen we aangeven met truukmatige roetine. Zowel in geval van vaardigheid als van truukmatige roetine kan de betrokkene zijn handelingen in een redelijke tijd uitvoeren. Maar iemend met vaardigheid handelt inzichtelijk, hij hoeft niet zoveel te onthouden, hij kan langer onthouden en hij maakt minder kans op fouten, dit in tegenstelling tot iemand met klakkeloze kennis en truukmatige roetine.

Hierboven is al betoogd, dat de werkboekopzet nauwelijks de mogelijkheid biedt

leerlingen tot inzicht te laten komen. De uitwerking van de ideeën over vaardigheden, zoals Van Hiele die uiteen heeft gezet, leidt ertoe dat de fase van het inoefenen steeds kort is gehouden, ons inziens volkomen terecht. Het voorbeeld aan het begin van deze paragraaf moge dit verduidelijkt hebben.
Ook al kan er dan geen sprake zijn van inzicht, toch probeert 'Van A tot Z' wel steeds te doen wat Van Hiele hiervoor omschreven heeft: nieuwe problemen tot reeds bekende herleiden. Een voorbeeld hiervan is de aanpak van de tweedegraadsfunkties.

De hele methode is erop gericht de leerlingen de volgende grondstruktuur bij te brengen: herleid elke tweedegraadsfunktie tot $x \rightarrow a(x - b)^2 + c$. De parameters a, b en c geven alle informatie: het teken van a of de grafiek een dal- of een bergparabool is, respektievelijk of de funktie een maksimum dan wel een minimum heeft; het paar (b, c) geeft de koördinaten van de top respektievelijk c geeft de uiterste waarde en b het origineel van die uiterste waarde; de vektor (b, c) geeft de translatie waarover de grafiek van deze funktie uit die van $x \rightarrow ax^2$ kan worden verkregen. Op het verwerven van deze grondstruktuur is het leerproces gebouwd.
Eerst de funktie $x \rightarrow ax^2$, voor zowel positieve als negatieve a bestuderen. Vervolgens komen afzonderlijk de funkties $x \rightarrow ax^2 + c$ en $x \rightarrow a(x - b)^2$ aan de orde, die steeds tot de eerste funktie worden teruggebracht. Dan pas komt de funktie $x \rightarrow a(x + b)^2 + c$ aan de orde. Steeds worden vragen over de soort grafiek, de benodigde translatie, minima en maksima gesteld. Een en ander resulteert in een lange rij opgaven, die voor ons onder de verzamelnaam 'inoefenen' vallen. We zijn zelfs een beetje bang dat door de gekozen opzet er na afloop bij de leerlingen niet veel meer aanwezig zal zijn dan de truukmatige roetine de antwoorden op vragen klakkeloos uit de parameters te halen. Dit lijkt ons een resultaat op laag nivo, terwijl het leerproces zelf op hoog nivo heeft plaatsgevonden: toen was er op zijn minst sprake van reproduktief begrijpen.
Door de gekozen opzet kan er bij de leerlingen geen sprake zijn van het inzicht, dat de uiterste waarde van $a(x - b)^2 + c$ iets te maken heeft met het niet-negatief zijn van de vorm $(x - b)^2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Misschien komt dit in de bovenbouwdelen ook nog op deze manier aan de orde.

Wat is nu ons oordeel over deze opzet?
Door heel veel opdrachten in de inoefensfeer begrijpen de leerlingen tijdens het leerproces op een eenzijdige meetkundige, maar voor heen waarschijnlijk makkelijke manier, wat er met funkties van het type $x \rightarrow a(x - b)^2 + c$ aan de hand is. Het blijft op reproduktief nivo. Aan het inzicht, of zelfs maar het begrijpen, dat er een verband is met het niet-negatief zijn van kwadraten, wordt geen aandacht geschonken. Deze weglating vinden wij jammer. Het meetkundig *inzicht* is misschien te eenzijdig.
Er is sprake van 'eensporigheid' in plaats van de veelzijdige aanpak, die wij zouden voorstaan. In dit geval is het getalsmatige spoor weggelaten. Wij zijn zelfs bang, dat de wiskundige aktiviteiten van de leerlingen bij het werken aan funkties van het type $x \rightarrow a(x - b)^2 + c$ verwordt tot truukmatige roetine: uit de getallen a, b en c lees je af en meer niet.

Voor we aan het einde van deze paragraaf komen, willen we nog een paar opmerkingen kwijt, die naar ons oordeel in het kader van oefening en inzicht thuis horen:

1 in het begin hebben we aangegeven, dat toepassen van geleerde kennis een onderdeel van oefenen is. Dat toepassen kan gebeuren door kombineren van stukjes kennis, die tot dan geïsoleerd waren aangebracht. Dat toepassen kan ook gebeuren door het aanwenden van geleerde kennis in enigszins nieuwe situaties. Die situaties kunnen zowel binnen als buiten de wiskunde gekozen worden. Wat opvalt is dat in 'Van A tot Z' de auteurs steeds binnen de wiskunde blijven. Dit lijkt ons een te grote verschraling van het gebied waar de wiskunde zijn diensten bewijst;
2 als één van de doelen van wiskundeonderwijs is, dat leerlingen moeten leren nieuwe situaties te herleiden tot reeds bekende, betekent dat voor ons ook dat een dergelijke werkmethode de leerlingen duidelijk gemaakt moet worden. Een dergelijk reflektie op hun werk ontbreekt volledig;
3 inzicht kan zich uiten, doordat een leerling een voor hem nieuw probleem adekwaat en intentioneel oplost. Bij dat oplossen kan bijvoorbeeld horen het beoordelen van de gegevens: beschik ik wel over alle gegevens, zijn ze allemaal nodig, hoe moet ik de gegevens gebruiken, enz. Door de werkboekopzet is er steeds voor gezorgd dat de leerling over alle benodigde gegevens, in de vorm van kennis uit het voorafgaande, beschikt. Op zich is dit natuurlijk een pluspunt, maar om te zorgen dat leerlingen aan inzicht tonen toe kunnen komen, is het juist nodig af en toe nu eens een niet zo mooie voorgestruktureerde situatie aan te bieden. In deze zin is de oefening die 'Van A tot Z' geeft strijdig met het ontwikkelen van inzicht. En in deze zin kan er geen sprake zijn van uitbalancering van die twee;
4 als inzicht wordt verstaan in de zin van 'iets nieuws tot iets bekends kunnen herleiden' (iets waar noch Van Hiele, noch wij het mee eens zijn), en oefening wordt verstaan als de weg – in de vorm van een rij goed gekozen opdrachten elke keer deze reduktie aangeven – dan is er zeker sprake van uitbalancering van oefening en inzicht.

b.z.

4 Voorlopige terugblik

– vragen voor gebruikers en auteurs –

Tussen theorie en praktijk is vaak een wereld van verschil. Praten, denken en schrijven over een methode zouden we theorie kunnen noemen en de lezer zal de eerste drie hoofdstukken waarschijnlijk wel als 'theoretisch beschouwend' ervaren hebben.
Men zal zich afvragen, hoe 'Van A tot Z' in de praktijk funktioneert. Inderdaad ligt het nu voor de hand die praktijk te bezien, ook al omdat bij het praten over de theoretische aspekten, vragen over die praktijk onbeantwoord bleven.
Bij het stellen van vragen zijn drie groepen in het geding, en wel de gebruikers, dat zijn de leerlingen en de leraren, en de auteurs.
Naast vragen over de methode zelf, treft U ook vragen van algemenere aard aan, zoals bijvoorbeeld de vraag over het verplichte leerstofprogramma.
Het leek ons aardig de vragen voor de leerlingen door de leraren te laten formuleren. Wij kwamen tot de volgende vragen:

1 *Vragen aan docenten*

1.1 Zijn er beperkingen aan te geven die het principe van een werkboek met zich meebrengt?
1.2 Worden er wel eens oefeningen overgeslagen? Welke?
1.3 In 'Van A tot Z' treffen we nogal eens de vraag aan: 'Hoe weet je dat?' Hoe reageren leerlingen op die vragen, hoe reageert U daar zelf op?
1.4 Ziet U resultaten van het principe van de telescoped reteaching?
1.5 Zijn er ervaringen aan te geven met betrekking tot de nivo's?
1.6 Hoe gebruikt U het werkschrift in Uw klassen?
1.7 Is het taalgebruik in 'Van A tot Z' inderdaad in overeenstemming met het taalnivo van Uw leerlingen?
1.8 Hebben de toetsen voor U een diagnostische waarde?
1.9 Houdt U zich aan het werken met inverse funkties bij het oplossen van vergelijkingen?
1.10 Hebben de leerlingen baat bij de steunstof?
1.11 Hoe zijn Uw ervaringen met betrekking tot de intuïtie van de leerlingen, zoals bij het kansbegrip?
1.12 Hoe reageert U op vragen van leerlingen in de trant van: waarom leren we dat, wat is het nut?

1.13 Zijn er onderwerpen in de voorgeschreven leerstof, die U minder, of helemaal niet zinvol acht?

1.14 Welke vragen zou U stellen aan Uw leerlingen over en in verband met 'Van A tot Z'?

2 *Vragen aan auteurs*

2.1 Waarom wordt er in 'Van A tot Z' zo weinig 'buiten' de wiskunde gewerkt?

2.2 We zijn niet zo gelukkig met de meerkeuze-vraagstukken. Waarom is er voor deze toetsvorm gekozen?

2.3 Het begrip variabele komt niet of nauwelijks uit de verf. Is dit opzettelijk gedaan?

2.4 Bent U het eens met onze mening dat het principe van een werkboek beperkend werkt?

2.5 Het hoofdstuk over bewijzen (HV-3b) is een soort veredelde invuloefening. Wat stond de auteurs voor ogen, toen dit hoofdstuk geschreven werd?

2.6 Waarom heeft men bij de behandeling van letterbreuken er zich zo gemakkelijk vanaf gemaakt (HV-2b)?

2.7 Vindt U dat er in 'Van A tot Z' voldoende bewustwordingspunten met betrekking tot 'wat is wiskunde' aan te geven zijn?

2.8 Bij het opzetten van de stof in 'Van A tot Z' had U te maken met de voorgeschreven leerstof. Zijn er onderwerpen in die stof geweest, die U tegen Uw zin heeft moeten introduceren?

5 Reaktie van gebruikers

–'Van A tot Z' in de klas–

Het Johannescollege, de docenten

De voorgaande analysen, aangevuld met de vragen aan docenten, waren uitgangspunt voor een gesprek met drie leden van de wiskundesektie van het Johannescollege, school voor havo en vwo met een tweejarige brugperiode, te Den Helder. Op woensdag 14 juni 1980 werden drie redaktieleden gastvrij ontvangen door de kollega's Albert Koning, Henny Heeman en Rien van de Ven. Een vierde kollega, Bert Huigen, die de voorbereidende besprekingen in de sektie wel had bijgewoond, moest op deze middag verstek laten gaan.

De open ruimte

De bespreking, die wij graag als open en vrij willen kenschetsen, vindt plaats in een ruimte, waar vier klassen gelijktijdig bezig kunnen zijn. Bijvoorbeeld twee parallelgeschakelde eerste klassen en twee parallelgeschakelde tweede klassen. De tafels zijn zo geplaatst dat de leerlingen in groepjes kunnen werken. In een aangrenzend lokaal is het mogelijk aan een groep leerlingen klassikaal les te geven. Deze zogenaamde instruktieruimte wordt echter alleen gebruikt, als blijkt dat een aantal leerlingen met dezelfde moeilijkheden kampt. De meeste tijd vindt het wiskunde-onderwijs evenwel plaats in de 'open ruimte'. Twee parallelklassen worden hierbij door de betreffende docenten begeleid. Deze begeleiding bestaat hoofdzakelijk uit het individueel hulp bieden. Soms worden door de docenten ook nieuwe gezichtspunten naar voren gebracht, als toelichting op wat in het boek staat.
Het is duidelijk dat deze vorm van wiskunde-onderwijs en de keuze van 'Van A tot Z' nauw samenhangen. Iedere andere leergang zou zeker minder mogelijkheden bieden, zo niet onbruikbaar zijn. Wiskunde is op het Johannescollege het enige vak dat zo intens de open ruimte gebruikt. De grote mate van zelfwerkzaamheid en aanpak volgens teamteaching worden, ondanks de aanwezigheid van deze akkomodatie, niet voor andere vakken gerealiseerd. Alleen de kollega's van aardrijkskunde, geschiedenis en engels maken incidenteel met een bepaalde klas van een dergelijke lokaliteit gebruik.

Genoemde open ruimte vormt het decor van onze bespreking. De genoemde docenten hebben in vooroverleg de vragen (blz. 330, 331) beantwoord en ook de eraan voorafgaande analysen besproken.

Algemene opmerkingen

De aandacht wordt eerst op het geheel gericht. 'Zijn er algemene opmerkingen over de totaliteit (blz. 289 t.e.m. 329) te maken?' Heeman reageert als eerste: 'Het eerste deel is wat uitvoerig, ik had moeite er helemaal doorheen te komen. Daarbij ontmoette ik weinig nieuwe gezichtspunten. Mijn verlangen werd steeds groter om praktische toepassingen te zien. Ik bedoel dat ik behoefte kreeg aan voorbeelden uit het boek, voorzien van kommentaar. Dat maakt het voor mij, als leraar-gebruiker, wat meer konkreet'. Van de Ven vult dit aan: 'Vooral hoofdstuk 3 deed daarom zo prettig aan. De theorie in het begin deed wat droog aan, maar de voorbeelden uit het derde hoofdstuk vind ik juist erg prettig. Voor mij persoonlijk is dat veel interessanter, want ze bieden mij een aantal herkenningspunten vanuit het werken in de klas'.
Koning meent te hebben geproefd dat de auteurs van het voorafgaande het niet op alle punten eens waren.' Bovendien kon ik duidelijk merken dat sommigen de leergang uit eigen ervaring kenden, en anderen louter een theoretisch standpunt hebben ingenomen'. Een redaktielid knikt aanmoedigend, en Koning vervolgt: 'Ik heb de indruk dat auteurs met praktische ervaring met 'Van A tot Z' minder kritisch waren dan de anderen. Het theoretisch standpunt leverde in ieder geval steeds méér negatieve kritiek op'.
Na enige waarderende opmerkingen over de leesbaarheid wordt deze ronde afgesloten. Men heeft geen vragen, en men heeft geen essentiele zaken gemist. De eigen ideeën over 'Van A tot Z' kan men geheel kwijt binnen de geformuleerde vragen. 'Zelfs, zo voegt men nog toe, waren de stukken en vragen aanleiding voor een diepgaande diskussie over het werk van de sektie'.

Voorkeur voor vragen?

We besluiten te beginnen met een bespreking van de vooraf geformuleerde vragen (blz. 330). Gesteld wordt dat er geen aanleiding is om bepaalde vragen eerst te behandelen. Wel wordt duidelijk dat niet alle vragen evenveel beantwoordingstijd zullen vergen. Weinig tijd is besteed aan de vragen 1.8 en 1.10. De toetsen worden namelijk niet-diagnostisch gebruikt, en dus is het ook niet nodig de steunstof zodanig te gebruiken. Later in het gesprek blijkt dat zowel toetsen als steunstof wel door de leerlingen worden doorgewerkt. In een enkel geval gebeurt dit als voorbereiding op een proefwerk, waar overigens géen multiple-choice-vragen, maar altijd open problemen worden gesteld. Met instemming van de anderen brengt Van de Ven zijn afkeuring van de vierkeuzenvragen naar voren. 'Gelukkig hoeven wij onze leerlingen (havo-vwo) hierop niet te trainen',

voegt hij eraan toe. Bevreemding wordt uitgesproken dat deze vorm van toetsing voor de mavo-examens is ingevoerd. Voor havo en vwo zou men dit zeker niet willen.
Terug naar de vragen. Ook de vragen 1.13 en 1.14 zijn nauwelijks voorbesproken. Het al dan niet zinvol zijn van de voorgeschreven leerstof was tot nu toe geen punt voor diskussie.

Beperkingen werkboek? (1, 1)

Men stelt voor de overige vragen nu een voor een, in de gegeven volgorde, door te nemen.
Van de Ven begint met veel waarderende woorden voor de werkboekvorm. Hij ziet geen beperkingen, integendeel. Deze presentatie van de leerstof sluit precies aan bij de gekozen werkvorm op de open ruimte. In die situatie dient het geven van instruktie tot de uitzonderingen te behoren. De leerlingen moeten zoveel mogelijk op eigen kracht door de stof kunnen komen. Natuurlijk wordt hulp geboden, en niet alleen door de docenten. Goede leerlingen wordt regelmatig gevraagd een andere leerling-in-nood bij te staan.
In deze opzet kunnen individuele moeilijkheden van leerlingen optimaal behandeld worden. De noodzaak ze maar 'aan te laten modderen' is niet aanwezig. En zijn er teveel leerlingen met moeilijkheden dan komt het gebruik van het instruktielokaal in beeld.
Voorzichtig wordt een andere vraag naar voren gebracht: 'Zijn er wel momenten dat de leerlingen gezamenlijk met een wiskundige problematiek bezig zijn?' Bedoeld worden problemen, waaraan nog geen kop of staart voor de kinderen te ontdekken valt. Pas door gezamenlijke doordenking, in een soort brainstorming, komt men dan stapje voor stapje verder. Soms ook in een toaal verkeerde richting...
Van de Ven gaat hierop in: 'Dit soort probleemgeoriënteerd onderwijs mis ik niet'. De andere kollega's vallen hem bij. Heeman vindt bovendien dat ook het werkboek niet altijd even gemakkelijk doorgewerkt wordt. Vaak worden de leerlingen voor problemen geplaatst, die ze niet direkt kunnen oplossen. Dan komt het wel voor dat een groepje in een brainstorming over het probleem gaat praten, suggesties doet voor mogelijke aanpakken, die bespreekt en verwerpt of uitvoert. Vaak wordt dan vroeg of laat de docent ingeschakeld om mee te denken of het pleit te beslechten. Van de Ven: 'De meeste leerlingen kunnen zeker zelfstandig verder komen'. Koning: 'Pas in de bovenbouw dient zich de noodzaak aan om klassikaal belangrijke leerstof te introduceren. Dan ga je, in gesprek met de klas, gezamenlijk bepaalde problemen te lijf'. Heeman: 'Je kunt dit soort zaken moeilijk in het algemeen stellen. Vaak hangt het van de klas af of er individueel en zelfstandig gewerkt kan worden. Sommige klassen vallen wat dit betreft slechter uit dan andere'.
Van de Ven merkt nog op dat het werken met een werkboek nog andere probleempjes mee kan brengen. Op blz. 326 van deze special wordt geschreven over middelloodlijnen. In de tekst in het werkboek staat: '... gevraagd

wordt...'. De leerlingen vatten dit op als een opdracht en beginnen meteen met de beantwoording. De auteurs gaan deze evenwel stap voor stap voorbereiden in de punten b), c), d) en e). Aangekomen bij e) stelt bijna elke leerling de vraag wat hij nu toch moet doen, omdat hij dat al (vaak foutief!) bij a) gedaan heeft. Een aardig moment in de diskussie, want nu blijkt dat ook de redaktieleden-auteurs dit 'gevraagd wordt' op hun eigen niveau hadden begrepen. Dat leerlingen dit anders kunnen verstaan, was hun ontgaan!
Al met al, er leeft grote tevredenheid met betrekking tot het werkboek. Ook de leerlingen geven, volgens de docenten, daar blijk van. Vooral in de brugklas werkt het prima. 'Ze vinden wiskunde één van de fijnste vakken, en dat is vroeger wel anders geweest', merkt Van de Ven fijntjes op.

Overslaan? (1.2)

Van overslaan is nauwelijks sprake. De beschikbare tijd (vier lesuren in de week in de eerste en tweede klas, vier lesuren in havo-3 en drie in vwo-3) is ruimschoots voldoende om alle stof in de boeken door te werken. Van de Ven noemt een enkel puntje: 'In deel 1a, hoofdstuk 2 slaan we de verjaardagskalender over, alleen uit praktische overwegingen. Het is wat moeilijk om op de open ruimte de gevraagde inventarisatie te maken'. Ook de laatste bladzijden van dit deel, over nomogrammen slaat men over. Ze bleken op diverse leerlingen verwarrend te werken 'In het bijzonder de verschillende eenheden op de getallenlijnen (door uitrekking bijvoorbeeld), of het niet recht onder elkaar staan van de nulpunten, zoals in eerdere nomogrammen, waren daarvan de oorzaak'.
Koning noemt nog een diskutabel punt. Het betreft de notatie $f: x \rightarrow 2 - x$, die als te moeilijk wordt ervaren. Liever zou hij zien: $f: x \rightarrow -x + 2$, wat beter bij de notatie aansluit van de vorige funkties.
Wat betreft het vele tekenwerk (op roosterpapier) heeft men een eensluidend oordeel: 'Dat mogen de leerlingen allemaal maken, en ze vinden dat prachtig'. Soms wordt zelfs thuis hier vooruitgewerkt.
Uit de boeken van de tweede klas wordt niets overgeslagen. Klas 3 wil men liever nog niet in deze diskussie betrekken. De boeken zijn nog niet zolang geleden veranderd, en men is nog in de probeerfase. Wel is nu al duidelijk dat ze sterk verbeterd zijn. Dit betreft vooral het betere taalgebruik, de hele opzet en de opbouw van de leerstof. De stapjes zijn kleiner, de leerlingen lopen minder gauw vast. Van de Ven: 'Vroeger sloegen we de automorfismen toch al over'. En na enig heen en weer gepraat: 'Vorig jaar zaten we met de derde klassers veel vaker in de instruktieruimte, dat is nu niet meer nodig.
Later in het gesprek blijkt dat het hoofdstuk 'Wat is een bewijs?' ook nu nog is overgeslagen, evenals de kongruentiegevallen. Koning: 'De leerlingen voelen kongruentie goed aan, en dan is de noodzaak van een bewijs ver te zoeken'.
In de diskussie blijkt dat het werken met 'Van A tot Z' ook van de docent het een en ander eist. Je moet een paar jaar nemen om je op deze werkwijze in te stellen. Van de Ven: 'Na een aantal jaren ervaring ga je sneller door het boek', en Koning vult aan: 'Dat komt omdat je de aksenten anders gaat plaatsen'.

Intermezzo

Het gesprek komt even op huiswerk. Ook in deze onderwijsaanpak krijgen de leerlingen, elke les, huiswerk mee. De kontrole ervan is gebaseerd op het zelf nakijken met antwoordenboekjes. Vragen die ze er dan nog over hebben, kunnen ze gedurende de les stellen.
Een ander punt komt naar voren. Dit gebeurt naar aanleiding van de toetsen, waarvan al gezegd is dat ze niet als diagnostisch worden gebruikt. 'Hoe wordt de keuze havo-vwo gedaan?' Koning: 'Alle docenten geven, naast hun cijfer, een persoonlijk advies mee'. Van de Ven: 'Een leerling kan bij mij een 7 hebben en toch geadviseerd worden havo te doen. Daarvoor heb ik zeer persoonlijke gegevens, die ik gedurende het kursusjaar in de klas heb kunnen verzamelen. Ik weet dat dit subjektief is. De plaatsing op havo of vwo wordt geregeld in overleg met de ouders. We denken dat we bij onze adviezen verantwoord te werk gaan'.

Hoe weet je dat? (1.3)

Deze vraag deed de wenkbrauwen rijzen. Men was zich er niet van bewust dat deze vraag vaak voorkomt. Koning: 'Ik merk deze vraag op bij nog al wat meetkundige probleemstellingen'.
We bladeren wat door de boeken, en Konings opmerking blijkt juist. Vooral in het derde deel komt de vraag voor, juist in die stukken, die nu nog overgeslagen worden. Van de Ven: 'Ik krijg nog al eens leerlingen, die ermee zitten, net als bij vragen van de vorm 'verklaar' of 'toon aan'. Ze vragen dan steeds wat ze erop moeten antwoorden, wat ze nu precies moeten opschrijven. Zo'n vraag blijft dan soms open, ook als ik de oplossing heb uitgelegd. Ze vinden het lastig om het goed op te schrijven. Trouwens, er zijn ook leerlingen, die dit soort vragen konsekwent overslaan'.
Er wordt nu even gerefereerd aan de waardering, die wiskundeleraren toch steeds aan de dag legden met betrekking tot 'het bewijzen'. Ook het artikel van F. v.d. Blij 'Het bewijs op school'[30]) wordt genoemd. 'Komt de welles-nietes-diskussie, zoals Van de Blij die noemt, wel eens naar voren?' Heeman: 'Zeker, vooral als er fouten worden gemaakt. Men is het dan niet eens, en probeert de ander te overtuigen. Als men er dan niet uitkomt, word ik geroepen. De docent weet het antwoord tenslotte zeker'. Koning: 'Als ik eerlijk ben moet ik zeggen dat ik 'het beijzen', of meer nog 'het redeneren' wel wat mis. In sommige gevallen wordt wel eens een redenering van twee of meer stappen vereist. Al is het alleen maar om de grootte van een hoek te vinden, in het geval van de opp. $= \frac{1}{2}d_1d_2 \sin a$, bij een parallellegram. Het nemen van de achtereenvolgende stappen komt niet altijd uit de verf. Dan vraag ik me wel eens bezorgd af, of ik op de goede weg ben. Dat zijn momenten dat ik 'het redeneren' bij mijn leerlingen echt mis'.
Even wordt de stelling van Pythagoras nog genoemd. Het aardige bewijs in het boek wordt door de leerlingen wel begrepen. Men komt er evenwel niet meer op terug, niet in het boek, niet in de proefwerken. Koning: 'Als ik een leerling hier

moet helpen bij het bewijs in het boek, voel ik me wel eens nutteloos. Ik doe het alleen voor mezelf, denk ik wel eens.'

Telescoped reteaching (1.4)

Van de Ven is vol lof over deze aanpak, vooral als hij het vergelijkt met vroegere aanpakken. Hij herinnert zich de grote moeilijkheden, die optraden bij onderwerpen als
- het oplossen van vergelijkingen ('vroeger was dat één hoofdstuk, en wat een ellende gaf dat')
- de *abc*-formule ('nu via een andere methode, die door de leerlingen beter begrepen wordt')
- richtingsvektor van een rechte lijn ('eerst vinden de leerlingen dat lastig, dan blijft het even liggen, dan komen ze er in deel 3b op terug; zonder problemen gaan ze er dan doorheen'). Iedereen is het er over eens: de methode van de telescoped reteaching 'werkt zeer goed in 'Van A tot Z'.

Niveaus (1.5)

Men komt er recht voor uit. Als docent in de praktijk denk je niet zo gauw op theoretisch niveau over wat leerlingen doen (en laten). Pas in het gesprek, als voorbereiding op deze diskussie, was men erover gaan nadenken. Al spoedig blijkt dat het begrip 'niveau' vele interpretaties heeft, en dat Van Hiele's theoretische konsept niet meer zuiver in de diskussie naar voren komt.
Dit is aanleiding genoeg om deze vraag verder te laten rusten.

Werkschrift (1.6)

Alle leerlingen hebben het in hun bezit. En in het begin van het jaar wordt er ook enthousiast mee begonnen. Dan echter verliest men het uit het oog. Een oorzaak ligt in de moeilijke kontroleerbaarheid van het werkschrift. Van de Ven: 'Je kunt toch niet dagelijks die schriften mee naar huis nemen om na te kijken?' Koning: 'Je kunt best zonder.' Heeman: 'Er is weinig verschil tussen werkschrift en werkboek. Als ze hier met wiskunde bezig zijn, doen ze dat met het werkboek op de manier van het werkschrift'. Van de Ven: 'Ik moet zeggen dat brugklassers het heel fijn vinden om erin te werken, maar derdeklassers hebben er een uitgesproken hekel aan.' Iemand stelt: 'Is het misschien iets voor de achterblijvers?' Heeman: 'Het boek levert weinig achterblijvers op. Er zijn maar weinig echte moeilijkheden, zoals bijvoorbeeld bij de negatieve getallen: de bewering: $\vec{a} - \vec{b}$ is de vektor die je bij $\vec{b}$ moet optellen om $\vec{a}$ te krijgen. Daar snapt geen mens iets van! Schrijf maar dat die zin er onmiddellijk uit moet.' Van de Ven: 'Je moet

gewoon met getallen beginnen, aansluiten bij wat bekend is. Zoals: 6 + .. = 9. Op de stippen staat 9 – 6...'
Terug naar de werkschriften. Eigenlijk had vraag 1.6 het bestaan ervan weer in de aandacht gebracht, nadat ze sinds de kerstvakantie uit het zich waren verdwenen. 'We zouden er het volgend jaar best wat meer mee kunnen gaan doen' was de konklusie van dit gesprekspunt.

Taalgebruik (1.7)

In het algemeen is men zeer positief in de reakties op de gebruikte taal. Vanzelfsprekend heeft men hier en daar wel een paar kritische detailopmerkingen. Ze betreffen vooral de te lange teksten, waarmee leerlingen het moeilijk blijken te hebben (zie bijvoorbeeld deel 1b, blz. 158). Koning: 'Mijn leerlingen zijn geneigd passages met veel tekst gewoon over te slaan'.
Hoe zit dit met de voortgang door de deeltjes heen?

Bestaat de indruk dat de leerlingen in de hogere klassen hebben geleerd langere teksten te verwerken?
De leraren hebben op deze vraag het antwoord niet direkt klaar. Men heeft dit niet nader onderzocht. Slechts het gevoel dat lange teksten in alle klassen slecht ontvangen worden, heeft de overhand.
Een tweede detail, betreffende het gebruik van moeilijke woorden. 'Van A tot Z' bezondigt zich daar niet aan. Alleen blz. 225 van deel 2a is wat al te gortig. Als het stukje wordt voorgelezen met achtereenvolgens de woorden relatie, inverse, oorspronkelijk en eindig in één zin, kunnen weinigen van de aanwezigen hun lachen bedwingen. Heeman: 'Toch moeten wij zeggen dat het taalgebruik over het algemeen goed is aangepast'.

Even een zijsprong. We hadden het over omgangstaal, maar de wiskunde heeft ook specifieke taalkenmerken. Daarbij komt dat regels, feiten, definities, stellingen, e.d. alle hun eigen betekenis hebben. De vraag dringt zich in het gesprek op in hoeverre de leerlingen deze typisch wiskundige verschillende kennisaspekten ervaren. Het antwoord blijkt niet eenvoudig. Men heeft dit eigenlijk nog niet eerder zo doordacht. Heeman: 'Bij mij slaan ze de definitie van kardinaalgetal over. En dat geeft geen problemen. Later in het voorkomende geval hoef ik ze alleen maar een hint te geven'.
Er wordt even op ingegaan. Bedoeld is hier niet de inhoud van definities, maar het feit dat er definities zijn en wat de betekenis is van definities in de wiskunde. Heeman: 'Ik noem het woord definitie nooit. En dat er 'afspraken gemaakt dienen te worden, vindt iedereen vanzelfsprekend". Koning: 'Een goed voorbeeld is de wortel uit een getal. Daarbij ervaart men de noodzaak van een afspraak sterk.'
Het artikeltje van Sieb Kemme[31]) over dit probleem, blijkt men overigens niet gelezen te hebben.

Inverse funktie (1.9)

De voor 'Van A tot Z' karakteristieke aanpak voor het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen, waarbij het funktiebegrip centraal staat, wordt door de docenten streng gevolgd. Slechts in gevallen als $ax + b = cx + d$ grijpt men wel naar de, alom bekende algoritmische methode: alle termen met x naar het linkerlid; daarna toch de vergelijking oplossen met de inverse funktie.

Het nut van de wiskunde (1.12)

De vraag heeft enige verwarring gesticht. 'Wat moeten we ermee?' was de eerste reaktie in de voorbespreking. Men stelt zich wat wantrouwend op. 'Zit er een addertje onder het gras?' Hier, in de bespreking, lijkt een toelichting niet overbodig. 'Van A tot Z' laat de wiskunde, naar de mening van de beschouwers, geïsoleerd naar voren komen. Op geen enkele plaats wordt gereflekteerd op de wiskunde, op de werkwijze, op de waarde ervan. Zouden leerlingen een dergelijke reflektie, op enige afstand van de te verwerven leerstof, niet wensen? Een dergelijke behoefte zou tot uitdrukking kunnen worden gebracht in vragen als: 'Wat is het nut hiervan?' of 'Wat heb je aan deze kennis?' Tenslotte is de wiskunde meer dan een hoeveelheid kennis en vaardigheden, waarmee je proefwerken en examens met voldoende cijfers kunt afsluiten. Heeman: 'Dergelijke vragen krijg ik alleen in gevallen dat de leerlingen de stof niet meer aankunnen.' Koning: 'Ik probeer nog wel eens te wijzen naar de natuurkunde. Wiskunde beschouw ik vooral als een verzorgend vak, zodoende. Maar de opzet in 'Van A tot Z' maakt dat niet eenvoudig. In feite doen onze kollega's van natuurkunde veel zaken totaal anders. Het oplossen van vergelijkingen het werken met de evenredigheidsmatrix, gelijkvormigheid... het zijn allemaal onderdelen, die men anders aanpakt'.
Men weet niet precies hoe men bij natuurkunde een en ander aanpakt. Of het nu gaat om instrumenteel gebruik van wiskundige technieken of andere inzichten (als bij funkties) worden aangebracht, dat is niet duidelijk.
Nu is wiskunde toch wel meer dan een verzorgend vak voor natuurkunde. Deze opmerking wordt in de diskussie voorzichtig naar voren gebracht. 'Wat breng je daarvan over op je leerlingen?' Heeman: 'Betere leerlingen komen niet op dit soort vragen. Ze vinden het gewoon fijn wiskunde te doen op de aangeboden manier.' Koning: 'Ik zou toch wel een verhaal over het nut aan goede leerlingen kwijt kunnen. Nu ik erover nadenk, komt het echter zeer zelden voor.'
Vinden de leraren ook dat dit soort vragen bij de leerlingen opgeroepen dienen te worden? De vraag biedt weinig respons. Het gesprek loopt ten einde, we zijn tenslotte al 2½ uur bezig. Met dank voor de intensieve medewerking, en een afspraak ook de leerlingen in deze gebruikersronde mee te laten doen nemen we afscheid.

De leerlingen

Een paar weken na dit gesprek ontvangen we van kollega Koning een aantal opstelletjes over 'Van A tot Z', die hij in zijn brugklas heeft laten maken. De opstelletjes komen over het algemeen op hetzelfde neer. Hieronder treft de lezer één van deze opstelletjes aan.

f.g./p.s./b.z.

Sylvain van der Vlist 1E Joco:
Wiskundeboek van A tot Z

Wiskunde is een vak waarvoor je moet denken, begrypen en netjes moetwerken. Begrypen is het moeilykst van de drie. Om alles goed te begrypen heb je een goed boek voor nodig die het zo gemakkelyk mogelyk beschryft. In de brugklas hebben we zo'n boek namelyk van A tot Zet. We hebben twee boeken deel 1A en deel 1b.
In boek 1A ~~beginnen~~ leren ~~ze~~ we de basis en in boek 1B breiden ~~ze~~ we het wat uit. Persoonlyk vind ik het boek van A tot Z een boek waarby je begrypend moet lezen, regel voor regel want anders kom je niet verder. Erg goed van dit boek vind ik de samenvattingen want dan lees je in het kort waar de les nu eigelyk ~~om~~ ging. Erg moeilyk te begrypen vind ik hoofdstuk 26 "Richtingen" om dat je gauw in de war raakt met verschillende dingen. ~~Een~~ Een makkelyk hoofdstuk was Hfd 27 "bewerking" want het was duidelyk beschreven en er waren goede voorbeelden by. Toen ik in het begin van dit schooljaar kwam was alles nieuw; x y assen, richtingen, spiegelingen noem maar op, maar dan zij het boek van A tot Z weet ik nu iets meer van wiskunde. Myn vader en Moeder hebben dit soort wiskunde niet gehad op hun vroegere school, maar die weten nu ook iets meer van het wiskunde boek van A tot Z. Hierdoor kunnen ze mij ook een beetje helpen. In het Werkschrift van A tot Z vind ik het ook fyn werken vooral figurenteken.

Ik hoop dat we dit boek in de tweede klas krygen

6 Het woord is aan de auteurs

In de eerste plaats ons kompliment aan de recensenten die zo hun best hebben gedaan zich te verdiepen in de uitgangspunten van de auteurs. Zulk soort recensies is, wat we nodig hebben. Door de gelegenheid die ons geboden wordt op de recensie in te gaan kunnen we nu ook spreken van een op gang gebrachte diskussie.

Vóórdat wij de vragen puntsgewijs onder handen nemen nog één opmerking. In het begin van de recensie komt, in tegenstelling tot later in de paragrafen 3.2 en 3.3, niet voldoende uit dat er een nivoteorie is waarop de metode is gebaseerd. Maar die nivoteorie heeft ten gevolge dat verschillende onderwerpen anders aangepakt worden dan gebruikelijk. Zo bijvoorbeeld de distributieve wet. Wij geven deze in de vorm: $3(a + b) = 3a + 3b$. In deze vorm is de uitspraak op nivo 0 te snappen. Daarentegen behoort de algemene uitspraak: $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ geheel tot nivo 1. Als je je op het standpunt stelt dat een aantal leerlingen in het eerste jaar dat nivo 1 niet halen, is de beperking duidelijk. De leerlingen op nivo 0 zien de struktuur $3(a + b) = 3a + 3b$ in allerlei vormen, ze zien dat $5(a + b) = 5a + 5b$ en $5(a + 3) = 5a + 5 \cdot 3$. net zo gaan. Op nivo nul is dit dezelfde struktuur als 3 maal een appel en een banaan is 3 appels en 3 bananen. Op nivo 1 is dit een onjuiste interpretatie, want dan zijn *a en b* 'willekeurige' getallen.

Er zijn in de kritiek nog een paar gevallen die op deze manier weerlegd kunnen worden: b.v. in hoofdstuk 2 de opmerkingen over de samenvattingen en de onmogelijkheid om in een roosterstruktuur een driehoek als variabel te beschouwen.

Nu de beantwoording van de vragen.

1 Waarom wordt er in 'Van A tot Z' zo weinig buiten de wiskunde gewerkt?

Antwoord. Is dit wel zo? In deel 1 hebben we er naar gestreefd in het begin de indruk te vermijden dat we met wiskunde bezig zijn. De dobbelsteen, het turven en stapelen, het tekenen van dieren, het spiegelen van figuren, wordt door de leerlingen niet als wiskunde beleefd. Het zou best mogelijk zijn deze speelse sfeer tot het einde toe vol te houden. We moeten ons echter realiseren dat het

eksamensysteem ons een keurslijf oplegt dat niet veel speling toelaat. Het is moeilijk hieraan veel te veranderen, overigens zouden we zelf best willen.

2 We zijn niet zo gelukkig met de meerkeuze-vraagstukken. Waarom is er voor deze toetsvorm gekozen?

Antwoord. Een jaar of acht geleden wilde iedere mavo-docent deze toets, omdat het R.I.T.P. er de scholen mee overstroomde. We zijn er toen zélf mee begonnen omdat we meenden — mét de hulp van J. Timmer — betere toetsen te kunnen maken. Zélf zijn we er niet erg van overtuigd dat de meerkeuzetoetsen voldoende informatie over de vorderingen van de leerlingen geven. Het enige voordeel is eigenlijk het snelle nakijken. Als gebruikers van 'Van A tot Z' op een andere zouden willen overgaan, zoals bijvoorbeeld onze vroegere 'Vragen over de regels' dan gaan we graag mee.

3 Het begrip 'variabele' komt niet of nauwelijks uit de verf. Is dit ekspres gedaan?

Antwoord. Deze vraag is ons niet duidelijk. Het begrip 'funktie' gekoppeld aan origineel en beeld wordt bijna direkt geïntroduceerd. Dit geschiedt op nivo nul. Maar is er dan geen sprake van variabelen? In deel 2 worden eigenschappen met letters genoteerd. Wat zijn deze letters anders dan variabelen? We moesten wachten tot het tweede jaar voor we op nivo 1 mochten redeneren. Maar wat blijft er dan over van 'niet of nauwelijks uit de verf'? Het lijkt ons dat de recensenten iets op het oog hebben dat we als onbelangrijk meenden te moeten weglaten, bijvoorbeeld het expliciet noemen van het woord 'variabele'. Een abstrakt begrip van 'variabele' is alleen mogelijk als er kwantoren ingevoerd worden, we nemen aan dat ze dát zeker niet bedoeld hebben.

4 Bent u het met mij eens dat het principe van een werkboek beperkend werkt?

Antwoord. Beperkend ten opzichte van wat? We zijn het oneens met de recensenten als ze zouden menen dat een werkboek beperkingen heeft ten opzichte van een leerboek van de stijl: eerst theorie en dan vraagstukken. Maar we zijn er zeker van overtuigd dat men leerlingen niet met een werkboek aan hun lot mag overlaten. Naast het werken met een werkboek moeten er klassegesprekken zijn. Vóórdat de leerlingen aan een les beginnen moeten er gesprekken plaats vinden waarin de problemen van de les aan de orde gesteld zijn. Het werkboek is ten slotte een hulpmiddel. Soms worden er in het werkboek opdrachten gegeven waarop de leerling naar de docent gaat om te vragen 'Wat wil het werkboek eigenlijk van mij?' Bijvoorbeeld als er staat 'ga dit na'. De bedoeling is dan juist dat er een kontakt komt tussen docent en leerling. Soms ook – vooral in de ekstra-stof – worden er problemen aangesneden die niet worden afgemaakt. De 'betere' leerlingen zien dan zelf het vervolg. De verhouding leerling–docent behoort dan zo te zijn, dat de leerling over deze voortzetting met de docent komt

praten. We zien het werken in een klas als een voortdurend gesprek: tussen leerlingen onderling, tussen docent en leerling, het klassegesprek. Het werkboek is daarbij het middel dat de problemen aandraagt.

5 Het hoofdstuk 'bewijzen' (HV 3b) is een soort veredelde invuloefening. Wat stond de auteurs voor ogen, toen dit hoofdstuk behandeld werd?

Antwoord We zien het 'bewijzen' als een onhaalbare kaart voor het mavo. Dit nivo wordt door de meeste leerlingen niet gehaald. Voor de havo-leerlingen lukt dit evenmin vóór de vierde of vijfde klas. We kunnen – zo lang we 'bewijzen' op prijs stellen, en zo lang het eksamen dit vraagt – in het derde jaar een receptief begrijpen van 'bewijzen' laten voorafgaan. De leerlingen kunnen dan vertrouwd raken met de taal die bij 'bewijzen' gebruikt wordt. Overigens, is 'bewijzen' zo belangrijk? Waar hebben in de praktijk 'consumers' van wiskunde 'bewijzen' voor nodig? Wie gelooft nog in een vormende waarde van bewijzen? Wel vinden we dat de v.w.o. leerlingen de kans moeten krijgen zich zo met wiskunde bezig te houden dat ze later eksakt leren denken.

6 Waarom heeft men bij de behandeling van letterbreuken er zich zo gemakkelijk afgemaakt? (HV 2b)

Antwoord. Bekend is dat breuken zowel in het basisonderwijs als in het voortgezet onderwijs moeilijk worden gevonden. Over het algemeen zijn de resultaten in de breuken-leerstof ook niet bevredigend. Je kunt als antwoord op dit gegeven twee kanten op. De eerste mogelijkheid is de breuken heel uitvoerig behandelen en de resultaten in te drillen. De andere mogelijkheid is dat we ons bezinnen op het nut van breuken. In het gewone rekenen kunnen breuken vervangen worden door decimaalbreuken, het rekenmachientje doet dan verder het werk. Letterbreuken vertegenwoordigen eigenschappen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ is een uitspraak over het produkt van de uitkomsten van twee delingen. Maar waar zijn deze uitspraken van belang? Bij het differentiëren van breuken is het dikwijls gewenst $\frac{f(x)}{g(x)}$ te beschouwen als $f(x) \cdot (g(x))^{-1}$. We zijn bereid in onze werkboeken aan breuken meer ruimte te geven, maar dan wel na een analyse vooraf over de wenselijkheid daarvan.

7 Vindt u dat er in 'Van A tot Z' voldoende bewustwordingspunten met betrekking tot 'wat is wiskunde' aan te geven zijn?

Antwoord. Deze vraag gaat ons bevattingsvermogen bijna te boven. In ieder geval weten we zélf niet 'wat wiskunde eigenlijk is'. Daarvoor zou een uitvoerige semantische analyse noodzakelijk zijn. Maar waarschijnlijk vatten we nu de

vraag anders op dan bedoeld is. Als je aan leerlingen die met het werkboek een jaar aan de gang geweest zijn vraagt, waarmee hebben jullie je bezig gehouden, dan krijg je lang geen gekke antwoorden. Als de leerlingen bezig geweest zijn met funkties, met afbeeldingen, met eigenschappen van vektoren, zijn ze dan soms niet in kontakt gebracht met het wezen van de wiskunde? In ieder geval meer dan wanneer ze bezig geweest zijn met 'rekenen met letters', 'konstrukties van driehoeken', enz. Het lijkt ons meer de taak van een werkboek leerlingen wiskunde te laten dóen dan uit te leggen wat wiskunde ís.

8 Bij het opzetten van de stof in 'Van A tot Z' had u te maken met de voorgeschreven leerstof. Zijn er onderwerpen in die stof geweest, die u tegen uw zin heeft moeten introduceren?

Antwoord. Het zou prettig geweest zijn als het programma van 1968 eerst algemeen was besproken in plaats van 'van boven opgelegd'. Er zitten nogal wat ondoordachte onderwerpen in zoals rationale en reële getallen, verzamelingen in de eerste klas. Het letterrekenen (kommutatieve, associatieve en distributieve wetten) in klas 1 komt ook voordat daar behoefte aan is.
In de tweede en derde klas wordt er onevenredig veel tijd besteed aan kwadratische vormen met hun grafieken en kwadratische vergelijkingen. Een algemene aanpak van funkties met hun volledig origineel van nul zou met eenvoudige benaderingsmethoden (rekenmachientje erbij) best daarvoor in de plaats kunnen komen. De statistiek voor mavo (met bijvoorbeeld modus in onzinnige gevallen) is zonder de kansrekening ook al zo'n misser. In onze werkboeken hebben we getracht er het beste van te maken door wat van de voorgeschreven stof af te wijken (zoals bij het gebruik van vektoren), maar natuurlijk bindt het programma je wel erg. Van de 16 meetkundige aspekten, beschreven in Begrip en Inzicht pag. 108 hebben we er een aantal niet kunnen verwezenlijken. Al behoeven we ons door het eindeksamen niet aan handen en voeten te laten binden, de vrijheid van keuze van onderwerpen wordt er toch sterk door bepaald.

G. Vis/P. M. van Hiele

7 Tenslotte

Bij het recenseren van schoolboeken tracht men in het algemeen een objektief beeld te geven. Veelal krijgt de lezer dan een soort neutrale informatie over aantallen pagina's, kwaliteit van figuren, volgorde in de leerstof, hoeveelheid oefenstof e.d. Zonder de waarde van dergelijke gegevens te miskennen, zijn we hier verder en dieper gegaan.
Dieper, omdat het leren van de leerlingen mede in beschouwing werd genomen, en *verder* door de subjektieve opstelling, die het inleven in leerling en leraar mogelijk maakte.
We zijn van mening, dat juist door deze aanpak een bruikbaar produkt is onstaan. De ekspliciet gemaakte visie van de recensenten, het interview met de gebruikers in Den Helder, de diskussie met auteurs van 'Van A tot Z' en hun 'laatste woord' vullen elkaar zodanig aan, dat naast een vrij volledig, ook een objektief beeld is ontstaan.

De hier gevolgde werkwijze was tijdrovend. Voor de auteurs stond daar echter veel tegenover, op dit punt zijn ze het roerend eens. Ook eensgezind hopen ze dat deze boekbeschouwing een dienst kan bewijzen aan wiskundesekties en lerarenopleidingen, aan begeleiders en opleiders, aan leraren en studenten. Naast het voorliggende produkt bevelen zij ook de gevolgde werkwijze van harte aan.

f.g.

Noten

1 De door ons bestudeerde leergang bestaat uit: deel HV-1a, 1b, 2a, 2b, 3a en 3b, speciaal voor de onderbouw havo/vwo. Hiernaast zijn de boekjes voor de onderbouw voor mavo: M-1a, 1b, 2a, 2b, 3a, en 3b. Deze verschillen van de HV-deeltjes in het ontbreken van de ekstra stof: herhaling en uitbreiding. Bij elk deeltje hoort verder een werkschrift.
2 In plaats van statistische betrouwbaarheid hebben we dus de validiteit in deze beschouwing voorrang gegeven. De gehele procedure, met inschakeling van gebruikers en auteurs, getuigt hier trouwens van.
3 Zie hiervoor: 'toelichting bij 'Van A tot Z'', die alleen bedoeld is voor de beide brugklassen (1a en 1b), en wel ten behoeve van de mavo-leraren.
4 De auteurs noemen dit didaktische principe in hun inleiding bij deel 1.
5 Van Hiele wijst hierop in: P. M. van Hiele: *Begrip en Inzicht*, pag. 44.
6 Zie bijvoorbeeld: H. Radatz: *Individuum und Mathematikunterricht. Eine Untersuchung zum konseptuellen Tempo und seiner Bedeutung für den Bereich der Erziehung*, Hannover 1976.
7 In het 'Wiskobas-Bulletin' werden twee leerplandelen aan oppervlakte besteed (leerplanpublikaties nr 7 en nr 9).
8 In de voorgaande deeltjes hebben de leerlingen zeker de gelegenheid gehad om bewijsvoeringen te voeren. Toen was nog niet het ogenblik aangebroken om hierop te reflekteren, wat bewijzen is in de wiskunde, werd niet – door het boek – bewust gemaakt. Hierop zou men hier terug kunnen komen.
9 Zie ook: P. M. van Hiele: *De intuïtieve grondslagen van de wiskunde*, in 'Euclides', jrg 50, 1974/1975.
10 Zie ook: P. M. van Hiele: *Begrip en Inzicht*, hfdst. 5, pag. 32: '*de leerstof dient te worden behandeld in de kontekst waarin zij thuishoort.*'
Dit doen de auteurs wel voor de meetkunde, maar niet voor de geïntroduceerde kansrekening.
11 Zie voor dit begrip bijvoorbeeld: M. Wertheimer: *Productive Thinking*, London 1969.
12 Wij willen ons trachten in deze aanpak in te leven. Daarmee sluiten we bewust andere, min of meer bekende invalshoeken uit. We denken aan R. Skemps onderscheiding tussen reflektief en intuïtief denken, aan Piagets intuïtieve noties en aan Vygotskii's spontane (tegenover wetenschappelijke) begrippen. Een theoretische beschouwing over verschillen en overeenkomsten zou in het kader van deze analyse niet op zijn plaats zijn.
13 Men zou kunnen denken aan twee linialen. De translatie $x \to x + 4$ is nu zichtbaar te maken. Bovendien ziet men dat $x \to x + 4$ voor *alle* getallen geldt.
14 Deze vraag hebben we de auteurs voorgelegd. Op pag. 341 is hun aantwoord uiteengezet.
15 Hier kunnen we er niet omheen om ook de in het Rijksleerplan voorgeschreven leerstof aan een kritische beschouwing te onderwerpen. Het noemen van de kommutatieve eigenschap op dit nivo van wiskunde bedrijven (leren), zou wel eens een didaktische blunder kunnen zijn.
16 $k > 0$ was beter geweest.
17 P. M. van Hiele: *De intuïtieve grondslagen van de wiskunde*, in 'Euclides', jubileumnummer, jrg 50, 1974/1975.
18 Zie ook hoofdstuk 5.
19 P. M. van Hiele: *Begrip en Inzicht*, pag. 33.
20 In het boek zijn overal originelen zwart en beelden rood afgedrukt.
21 Een nomogram bestaat uit twee getallenrechten onder elkaar. Originelen werden op de onderste, beelden op de bovenste getekend, en daarna door pijlen verbonden. Zie bijvoorbeeld pag. 39.
22 Zie: 'Euclides', jrg 55 nr. 4, pag. 126.
23 Het gevaar van deze opzet: algemene uitspraken doen op grond van heel weinig voorbeelden, zijn we ons bewust, maar ondanks dit gevaar hebben we hier toch voor gekozen.
24 Zie: P. M. van Hiele: *Begrip en Inzicht*, pag. 83.
25 Een andere, nauw verwante indeling van 'begrippen' kan men vinden in het artikel van R. Skemp: *Relational understanding and Instrumental understanding*, in 'Mathematics Teaching', nr 77, december 1977.
26 B. Zwaneveld en J. van Dormolen: *Handelen om te begrijpen*, Utrecht 1977, hfdst. 1.
27 Zie: P. M. van Hiele: *Begrip en Inzicht*, hfdst. 6, pag. 36 e.v.

28 Zie- J. van Dormolen en B. Zwaneveld: *Instappen en toepassen*, hfdst. 2.
29 Zie: J. van Dormolen: *Vaardigheden, 1001 redenen waarom leerlingen geen goede routine hebben*, Utrecht 1975, hoofdst. 1.
30 F. van de Blij: *Het bewijs op school*, Euclides, jrg. 55, 1979/1980, pag. 108.
31 S. Kemme: *'Talig' bezig zijn met wiskunde-onderwijs*, Euclides, jrg. 54, 1978/1979, pag. 391.

Mededelingen

Zesde studiedag NVvW-VVWL

Ter herinnering
Op *28 maart* heeft deze studiedag plaats in het KA Kapellen, Streepstraat 2.
Thema: De geschiedenis van de wiskunde en het onderwijs.
Sprekers: Prof. Dr. A. W. Grootendorst en Prof. Dr. G. Hirsch.
Programma: zie het vorige nummer.
Wilt u voor 15 maart, indien u deel zult nemen, voor de warme lunch *f* 15,– overmaken op giro 143917 t.n.v. de NVvW te Amsterdam?

Het bestuur

De Minister van Onderwijs en Wetenschappen

brengt ter kennis van belanghebbenden, dat zij, die zich in 1981 wensen te onderwerpen aan het examen wiskunde m.o.A of B, af te nemen door de *Algemene Commissie*, zich uitsluitend kunnen aanmelden door het examengeld à *f* 60,– vóór 1 mei 1981 over te maken op postrekening 172007 ten name van de voorzitter van de algemene examencommissie wiskunde m.o., per adres Aardbeistraat 11, 2564 TM 's-Gravenhage, met vermelding van *volledige naam en adres* van de *kandidaat* en de mededeling of men zich opgeeft voor *m.o.A* dan wel voor *m.o.B*. Na 1 mei 1981 ontvangen de aangemelde kandidaten nadere instructies van de examencommissie.
Met betrekking tot het A-examen wordt opgemerkt, dat alleen zij, die in *1979* of *1980* hebben deelgenomen aan het examen *analyse oude stijl* en aan het examen *projectieve* en *beschrijvende meetkunde* en voor één van deze beide vakken een vrijstelling behaalden, het examen in oude stijl kunnen voltooien. *Alle andere A-kandidaten leggen het examen af in nieuwe stijl.*
Met betrekking tot het B-examen wordt opgemerkt, dat alleen zij, die in 1979 of 1980 hebben deelgenomen aan het examen *Meetkunde oude stijl* en beschikken over geldige vrijstellingen voor minstens één van de beide andere vakken, het examen *in oude stijl* kunnen voltooien. *Alle andere B-kandidaten leggen het examen af in nieuwe stijl.*
Met betrekking tot de deelexamens wordt opgemerkt, dat bij het A-examen een deelexamen twee vakken (naar keuze van de kandidaat) dient te omvatten. Bij het B-examen bestaat een deelexamen òf wel uit Analyse en Functietheorie òf wel uit de Meetkunde vakken.
De nieuwe programma's zijn omschreven in het 'Nieuwe Tijdschrift voor Wiskunde' jaargang 63, aflevering 2, november 1975, blz. 86 t/m 93. Men kan deze programma's verkrijgen door storting van *f* 2,– op postgiro 172007 ten name van de voorzitter examencommissie wiskunde m.o., p/a Aardbeistraat 11, 2564 TM 's-Gravenhage, onder vermelding 'examenprogramma'.
Het schriftelijk gedeelte van het A-examen wordt afgenomen op 18 en 19 augustus 1981, het schriftelijk gedeelte van het B-examen op 20 en 21 augustus 1981.
De schriftelijke zittingen zijn toegankelijk voor iedereen, die zich heeft aangemeld.

De minister, namens deze, A. Th. Eijsenring

IFIP World Conference 'Computers in Education' (WCCE '81)

Van 27 juli tot en met 31 juli 1981 zal in Lausanne (Zwitserland) met steun van UNESCO en het Intergovernmental Bureau for Informatics (IBI) de derde IFIP-wereldconferentie 'Computers in Education' WCCE '81 worden gehouden.
Tijdens de conferentie zullen naar verwachting de volgende onderwerpen aan de orde komen:

- Informatics and the teaching of other disciplines
- Reviews of national policies and models of computer education
- Identifying the needs of developing countries and defining the means to meet them
- Instructional Techniques
- The impact of new technologies
- Social impacts
- Aims, policies, and curricula for informatics education.

Met de conferentie gaat een expositie gepaard.
Het 'advance programme' van WCCE '81 is beschikbaar op het secretariaat van het NGI, Paulus Potterstraat 40, 1071 DB Amsterdam.

'Van A tot Z'
– op de keper beschouwd –

INHOUD